Mechanika

studijní text pro kombinované studium

Jiří Králík
Katedra fyziky PF UJEP

verze II z 5. 12. 2007

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Předkládaný studijní materiál kurzu **Mechanika** je určen pro bakalářské kombinované studium Počítačové modelování ve vědě a technice na katedře fyziky Pedagogické fakulty Univerzity J. E. Purkyně. Tato forma studia klade zvýšené nároky na samostatnou práci a tomu odpovídá i zpracování skripta, které máte před sebou. Vzhledem k existenci českého vydání moderní vysokoškolské učebnice základního kurzu fyziky (jehož je tento předmět součástí), upustil jsem od psaní kompletního výkladového textu. Namísto toho byla zvolena „odkazovací“ forma textu, který vás bude při studiu mechaniky provázet. Onou moderně zpracovanou učebnicí je **Fyzika** od D. Hallidaye, R. Resnicka a J. Walkera [1].[1] Diskuse ke knize lze nalézt na http://www.vutbr.cz/nakl/fyzika a aktuální opravenku na http://utf.mff.cuni.cz/∼jobdr. Tato kniha (resp. soubor knih) obsahuje jak srozumitelný výklad, tak modelová cvičení s řešeními a kontrolní otázky. Navíc disponuje dostatečně velkým množstvím cvičení a úloh k samostatné práci. Vzhledem k velmi úzké provázanosti předkládaného skripta s uvedenou učebnicí, je více než doporučeno vypůjčit si **Fyziku** v knihovně nebo si ji ještě lépe zakoupit.

Obsah **Fyziky** pokrývá celý základní vysokoškolský kurz, takže je použitelná i v dalších partiích fyziky. Nadto kniha obsahuje fyzikální výklad velkého množství veskrze zajímavých jevů „ze života“, čímž přibližuje tradičně často vzdálené studium fyziky a její jednoduché aplikace ve skutečném světě. **Fyzika** pro vás bude základním studijním materiálem a právě pročítané skriptum si klade za úkol vás provést po částech týkajících se mechaniky.

Při studiu jednotlivých kapitol tohoto kurzu se nejprve seznamte s příslušnými studijními **cíli**. Studijní cíle specifikují, co byste měli po prostudování dané kapitoly umět. Zvlášť důležitá je ovšem schopnost řešení úloh. Cestu k vytyčeným cílům vám ukáží **pokyny**, ve kterých se dovíte, které odstavce by bylo dobré si pročíst důkladněji. Nicméně pro konkrétní pokyny, na které partie je vhodné se speciálně zaměřit a které které si můžete přečíst třeba jen z vlastního zájmu, se musíte vracet vždy k cílům. K většině partií byly v tomto skriptu připojeny **dodatky**, které doplňují nebo rozšiřují základní text – velkou měrou jde ovšem pouze o záležitosti formálního charakteru, určené až k „druhému čtení“. Dodatky je vhodné studovat s intenzitou odpovídající cílům stanoveným pro danou oblast

[1] Na tuto knihu bude odkazováno vždy tučným zvýrazněním derivátů slova „Fyzika“.

mechaniky. Jsou převážně zaměřeny na matematičtěji orientovaného studenta[2], který již má vybudovanou představu o derivování a integrování, alespoň na nejzákladnější úrovni. Znalost matematických odvození vyskytujících se v dodatcích, jsou u zkoušky výhodou, ovšem nikoli nezbytností. Budiž na tomto místě zdůrazněno, že při kontrolách studia je daleko více kladen důraz na fyzikální pochopení problémů než na znalost formálně matematických operací.

Důležitou součástí učení se fyzice je řešení příkladů. Při řešení příkladů na dané téma se nejen ověřuje, jak hluboce bylo porozuměno výkladu, ale rovněž se získává i jistá „zručnost“ – zcela v duchu praxí ověřeného prohlášení „Moudrost přichází do hlavy rukou.“ Kompletně řešené příklady jsou součástí výkladu hlavního textu, je však nutné naučit se řešit příklady samostatně. Někteří lidé s jistou dávkou škodolibosti tvrdí, že nejhorší je spočítání „jen“ prvního tisíce příkladů, že pak už je to všechno nastejno – osobně si myslím, že na tom něco pravdy je. Abyste však nebyli hned ze začátku odrazeni tím ohromným množstvím různých cvičení a úloh, které **Fyzika** nabízí, byl pro vás v části **kontroly** vybrán jejich redukovaný počet. Zvládnutí příkladů tam vypsaných bude jistě silně korespondovat s vysokou úspěšností při zdolávání zápočtu i zkoušky. Hvězdička u označení příkladu upozorňuje na úlohu, která je dle mého názoru zajímavá buď informativně nebo stylem či obtížností řešení – znalost řešení tohoto příkladu však není bezpodmínečně nutná k získání zápočtu.

Pokud si nebudete jisti vámi získaným výsledkem nějakého cvičení či úlohy[3] a na konci učebnice nebude uvedeno řešení (ve **Fyzice** jsou uvedeny jen výsledky úloh s lichým pořadovým číslem.), zkuste spočítat podobné příklady z okolí uvedeného, to by vám mělo dát jistotu v postupu. Pokud si nebudete vědět rady vůbec, je na čase si znovu zopakovat příslušné partie či požádat svou kolegyni či svého kolegu o radu. Pokud ani to neuspěje, jsou tu konzultace. Pokud však nezaberou ani ty, je každá rada drahá :-) U všech **kontrol** budete vždy zvlášť upozorněni na nevynechání poctivého odpovídání na otázky pokládané za každou kapitolou – nejen, že případné odpovědi budou sloužit k vaší zpětné vazbě a odhadu úspěšnosti u ústní zkoušky, ale ověří i vaši schopnost formulovat smysluplné odpovědi (nejen fyzikálně, ale i gramaticky a slohově). Ideální je zkoušet se v nejméně dvoučlenném kolektivu.[4]

Při studiu mechaniky se předpokládá, že již znáte základy vektorového počtu. V případě, že si ještě nejste touto partií matematiky zcela jisti, oživte si ji studiem kapitoly 3 (zvlášť doporučuji odstavce 3.3, 3.4, 3.6 a 3.7.). Vaše znalosti budou dále prohloubeny ve cvičeních Matematického prosemináře. V dodatcích, na rozdíl od **Fyziky**, uvažujeme pouze v jednotkách soustavy SI, jejíž základní fakta byste měli znát již ze střední školy. Jistým shrnutím a doplněním látky ze střední školy by měl být kurz **Úvod do fyziky**.

[2]I když si vůbec nekladou nároky na exaktnost a mnoho pojmů je třeba na tomto stupni znalostí užívat jen intuitivně. Důležité je si uvědomit, že naznačené operace **lze** logicky korektně provést.

[3]Řešení cvičení zpravidla vyžaduje pouhé dosazení do vztahu vyskytujícího se ve výkladové části či jen jednoduché zkombinování již známých vzorců. Naproti tomu nad řešením úlohy je nutné se občas i zamyslet :-)

[4]Výzkumy ukazují, že nejvíce se naučíte, když budete někoho učit ;-)

Jak již bylo uvedeno, v dodatcích se dále předpokládá, že během prvního semestru získáte názornou představu a alespoň malou zběhlost v diferenciálním a integrálním počtu.

Aby bylo jasné, které rovnítko definuje novou veličinu, které pouze zjednodušuje zápis a které dává do souvislosti již ne tak zřejmé vztahy, uchýlil jsem se v dodatcích k zavedení tří druhů rovností → $\stackrel{\text{def}}{=}$, $\equiv$ a $=$. Při prvním čtení ale není nutné tato rovnítka rozlišovat. V textu jsou u označení veličin často užívány indexy i pro označení počátečních hodnot (z anglického „initial") a f pro označení konečných hodnot (z anglického „final").

Pokud se vám budou zdát některé partie hlavního textu či dodatků nesrozumitelné nebo nedostatečně vysvětlené, na konci tohoto skripta je uveden seznam vhodné doplňkové literatury, která ve svém souhrnu je, jak doufám, schopna tyto mezery doplnit. Nicméně nezapomínejte, že vám jsou k dispozici ještě konzultace. Za zvlášť nepochopitelná či dokonce nepřesná vyjádření se omlouvám a budu vděčný každému, kdo mě na ně upozorní.[5] Přeji vám hodně úspěchů při zdolávání první (mechanické) bariéry na cestě k vysokoškolskému vzdělání vámi vybraného směru.

[5]Samozřejmě budu vděčný také každému, kdo mě upozorní i na nedostatky méně závažné.

Kapitola 2

Popis pohybu mrňavých předmětů

Cíle

1. Vědět čím se zabývá mechanika, kinematika a čím dynamika a umět formulovat rozdíly mezi nimi.
2. Umět vysvětlit pojmy: skalární veličina, vektorová veličina, mechanický pohyb, hmotný bod, vztažná soustava, polohový vektor, vektor posunutí, trajektorie a dráha.
3. Znát podobnosti a rozdíly mezi střední a okamžitou rychlostí a mezi středním a okamžitým zrychlením (graficky, formálně matematicky i na názorných příkladech).
4. Umět na příkladech objasnit rozdíl mezi používáním slov rychlost a zrychlení v běžné mluvě a ve fyzice.
5. Umět ze zadaného grafu závislosti polohy, rychlosti či zrychlení na čase získat grafy zbylých dvou veličin a okomentovat z nich průběh pohybu slovně.
6. Dokázat uvést rozdíly mezi přímočarým pohybem, rovnoměrným pohybem, pohybem rovnoměrně zrychleným a rovnoměrně zpomaleným a pohybem po kružnici.
7. Detailně znát zákonitosti šikmého vrhu (tj. včetně speciálních případů – vodorovného a svislého vrhu a volného pádu) a pohybu po kružnici (tečné a normálové zrychlení, oskulační kružnice).
8. Umět vysvětlit tabulku uvedenou v Dodatcích v odstavci Klasifikace pohybů.

Pokyny

1. Prostudujte kapitolu 2 **Přímočarý pohyb**.
2. Prostudujte kapitolu 4 **Dvojrozměrný a trojrozměrný pohyb**.
3. Prostudujte dodatky k tomuto tématu.

Kontroly

1. Poctivě projděte všechny kontroly v doporučených kapitolách a odpovězte na otázky za jednotlivými kapitolami.

2. Řešte úlohy: **k odst. 2.3** — 1C, 4C, 11Ú, 12Ú, 15Ú*; **k odst. 2.4** — 16C, 18C; **k odst. 2.5** — 20C, 22C, 25C, 26C, 31Ú, 32Ú; **k odst. 2.6** — 33C*, 36C, 37C*, 39C, 41C*, 42C, 44C*, 47Ú, 51Ú, 56Ú, 57Ú; **k odst. 2.8** — 61C, 62C*, 65C, 66C, 68Ú, 70Ú, 71Ú*, 75Ú, 76Ú*, 80Ú, 89Ú; **k odst. 4.2** — 1C, 4C; **k odst. 4.3** — 5C, 9C; **k odst. 4.4** — 12C, 14Ú, 17Ú*; **k odst. 4.6** — 19C, 21C, 28C, 31C, 33Ú, 34Ú*, 38Ú, 40Ú, 43Ú, 49Ú, 54Ú; **k odst. 4.7** — 59C, 61C, 64C*, 65C*, 67Ú, 71Ú; **k odst. 4.8** — 72C, 75C; **k odst. 4.9** — 77C, 78C, 85Ú, 87Ú; **k odst. 4.10** — 89C, 91Ú.

3. Řešte úlohy pro počítač*.

Dodatky

2.1 Pomocné pojmy

Kinematika hmotného bodu se podobně jako botanika zabývá pouze **popisem** objektů svého zájmu. Konkrétně kinematika zkoumá „geometrii“ mechanických pohybů, bez ohledu na jejich příčiny. Příčinami pohybu se zabývá až další část mechaniky – *dynamika*. Pohyb popisujeme vždy vůči tzv. *vztažné soustavě*, což je nějaké (tuhé) těleso a s ním spojená soustava souřadnic s určeným způsobem měření času. Pro popis pohybu užíváme různých idealizací, nejjednodušší popis pohybu reálných těles zavádíme pojmem *hmotný bod*. Abstraktně chápeme tento pojem jako bezrozměrné (nuladimenzionální) těleso určené pouze svou hmotností m a polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$. Místo pojmu hmotný bod se někdy (ve **Fyzice** téměř vždy) užívá pojmu *částice*, který je přece jen o něco bližší běžné mluvě.

Mění-li se poloha částice vůči určité vztažné soustavě spojitě s časem (to budeme předpokládat i nadále), označujeme soubor těchto poloh jako *trajektorii* částice. Pohybovala-li se částice v časovém intervalu $\langle t_i; t_f\rangle$, bude každému bodu (okamžiku) tohoto intervalu příslušet nějaké místo (bod) v prostoru $[x;\ y;\ z]$. Dostáváme tak uspořádanou trojici spojitých funkcí $x(t), y(t)$ a $z(t)$, které jednoznačně určují kde a kdy se částice při svém pohybu nacházela. Vektorovou funkci

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}. \tag{2.1}$$

považujeme za matematické (parametrické) vyjádření trajektorie. Vektoru $\boldsymbol{r}(t)$ říkáme *polohový vektor.* [1]

[1] Uvědomte si, že konkrétní vyjádření polohového vektoru 2.1 závisí na zvolené souřadnicové soustavě – v jiné soustavě by měl jiné vyjádření. Rovněž trajektorie vypadá v různých soustavách souřadnic různě. Protože polohový vektor a tvar trajektorie závisí na „úhlu pohledu“, říkáme o nich, že jsou *relativní*.

Funkce $\boldsymbol{r}(t)$ však poskytuje více informací než jen určení množiny poloh, ve kterých se částice při svém pohybu mohla nacházet (trajektorii). Protože každému okamžiku, ve kterém částici sledujeme, přiřazuje právě jeden bod v prostoru,[2] můžeme pomocí ní zkoumat průběh pohybu částice daleko detailněji. Než začneme s důkladnějším „výzkumem“, zavedeme si nejprve vhodné pojmy.

Trajektorii jako geometrickou křivku v prostoru můžeme, podobně jako reálnou osu, opatřit čísly s_k, které ve zvolených jednotkách udávají vzdálenost (měřenou podél trajektorie) od nějakého zvoleného bodu O, zvaného počátek. Podobně jako kdybychom podél kolejí železniční trati umístili dlouhý krejčovský metr, pomocí něhož bychom jednoznačně mohli určit polohu každého místa na trati jako vzdálenost od počátku O.[3] Vzdálenost na trajektorii pokryté takovýmito souřadnicemi pak můžeme vypočítat jako absolutní hodnotu jejich rozdílu, tj. vzdálenost z místa označeného jako s_i do místa se souřadnicí s_f bude rovna $|s_f - s_i| = |s_i - s_f|$. Pohybovala-li se částice po trajektorii pouze jedním směrem (kladným či záporným) a v čase t_i se nacházela na místě o souřadnici $s(t_i)$ a v čase $t_f \equiv t_i + \Delta t$[4] se nacházela na místě $s(t_f)$, říkáme, že urazila *dráhu*

$$|\Delta s| \stackrel{\text{def}}{=} |s(t_f) - s(t_i)| \equiv |s(t_i + \Delta t) - s(t_i)|. \tag{2.2}$$

Ze způsobu zavedení dráhy vidíme, že měří délku trajektorie,[5] jde tedy o nezápornou skalární veličinu měřenou v metrech.

Zkoumáme-li délku vektoru *posunutí* definovaného jako změnu polohového vektoru v časovém intervalu $\langle t_i, t_f \rangle$, tj.

$$\Delta \boldsymbol{r} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{r}(t_f) - \boldsymbol{r}(t_i) \equiv \boldsymbol{r}(t_i + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_i). \tag{2.3}$$

je patrné, že $|\Delta \boldsymbol{r}|$ je pro křivočarý pohyb a konečný časový interval vždy menší než příslušná délka trajektorie $|\Delta s|$. Se zmenšujícím se časovým intervalem Δt ovšem $|\Delta \boldsymbol{r}|$ se k $|\Delta s|$ stále více blíží, tj.:

$$\text{pro} \quad \Delta t \to 0 \quad \text{je} \quad |\Delta \boldsymbol{r}| \to |\Delta s|^{6} \tag{2.4}$$

V této souvislosti se ve stručnosti zmiňme o jednom velmi užitečném pojmu – o diferenciálu. Diferenciál $\mathrm{d}f$ funkce $f(x)$ jedné proměnné v bodě x_0 je definován jako součin derivace funkce $f(x)$ v tomto bodě, tj. $\frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$, a přírůstku Δx nezávisle proměnné x, platí tedy:

$$\mathrm{d}f(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right) \Delta x \equiv \frac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x} \Delta x. \tag{2.5}$$

[2] Chápáno obráceně by se mohlo tvrdit, že funkce $\boldsymbol{r}$ opatřuje každý bod trajektorie jednou nebo více visačkami s okamžikem průchodu částice.

[3] Samozřejmě, že na opačnou stranu od O bychom museli položit metr označený zápornými znaménky.

[4] Ačkoliv bychom ve většině úvah mohli považovat Δt také za záporné, mějme na paměti, že v dalším textu bude vždy $\Delta t > 0$.

[5] Takže rovněž musí záviset na vztažné soustavě – je to opět veličina relativní.

[6] Snad nebude hrozit nedorzoumění, když budeme nadále „absolutní hodnotu“ v označení dráhy vynechávat. Ostatně se to tak běžně dělá ;-)

Diferenciál charakterizuje lineární změny funkce f v závislosti na změnách Δx proměnné x, přitom změny Δx mohou být v principu libovolně velké. Skutečná změna

$$\Delta f \equiv f(x + \Delta x) - f(x).$$

funkce $f(x)$ však obecně není rovna jejímu diferenciálu $\mathrm{d}f$. Ovšem při zmenšující se změně proměnné Δx, bude diferenciál $\mathrm{d}f$ skutečnou změnu Δf funkce $f(x)$ stále lépe aproximovat, tj. při $\Delta x \to 0$ se také $\Delta f \to \mathrm{d}f$. Záměna změny funkce jejím diferenciálem (tj. lineární změnou její nezávislé proměnné) se ve fyzice velmi často využívá a taková dostatečně malá Δx, pro která je záměna Δf za $\mathrm{d}f$ dostatečně přesná (pro daný řešený problém), obvykle značíme $\mathrm{d}x$. Samotné značení a chápání derivace $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ jako podílu dvou zlomků – diferenciálů – je při formálních úpravách ve fyzice opět hojně užíváno, při aplikacích na „nezlobivé“ závislosti (a ty většinou můžeme předpokládat) totiž nevede k rozporům.

Vraťme se nyní k vektoru posunutí a jeho souvislosti s dráhou. Z uvedeného je vidět, že při dostatečně malých časových změnách $\mathrm{d}t$ je velikost diferenciálu $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ rovna diferenciálu $\mathrm{d}s$.[7]

Při pohybu částice během časového intervalu $\langle t_i; t_f\rangle$ po trajektorii dané funkcí $\boldsymbol{r}(t)$, bude její celková uražená dráha dána formálně vztahem

$$\Delta s_{if} = \int_{s(t_i)}^{s(t_f)} \mathrm{d}s = \int_{\boldsymbol{r}(t_i)}^{\boldsymbol{r}(t_f)} |\mathrm{d}\boldsymbol{r}| \tag{2.6}$$

Tento výraz je vhodné chápat jako součet mnoha velmi malých úseků dráhy v souladu s běžným („fyzikálním“) chápáním integrálu (nakreslete si obrázek).

Zajímáme-li se o směr vektoru posunutí, je vidět, že při zmenšování Δt, míří $\Delta\boldsymbol{r}$ stále více ve směru tečny k trajektorii. Označme jednotkový vektor ve směru tečny k trajektorii částice a s orientací ve směru jejího pohybu, tzv. *tečný jednotkový vektor*, výrazem $\boldsymbol{\tau}^\circ = \boldsymbol{\tau}^\circ(t)$ (platí tedy $\boldsymbol{\tau}^\circ \cdot \boldsymbol{\tau}^\circ = 1$, resp. $|\boldsymbol{\tau}^\circ| = 1$). Protože každý vektor můžeme vyjádřit jako součin jeho velikosti a směru reprezentovaného jeho jednotkovým vektorem, můžeme malinkatou (diferenciální) změnu polohového vektoru pak zapisovat jako

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\tau}^\circ \mathrm{d}s \tag{2.7}$$

Tento vztah bude využit v dalším.

Jak již víme, kinematika slouží především k **popisu** pohybu. Nyní jsme připraveni ze zadané nebo změřené časové závislosti $\boldsymbol{r}(t)$ určovat další (kinematické) veličiny, které představu pohybu dále „dokreslují“. Podívejme se nyní na nejdůležitější z nich – *rychlost* a *zrychlení.*

---

[7] O diferenciálu vektorové funkce $\boldsymbol{r}(t)$ bude zmínka v souvislosti s okamžitou rychlostí. Na tomto místě jen pro úplnost uvedeme definici diferenciálu vektorové funkce jedné proměnné (pro konkrétnost jde o funkci $\boldsymbol{r}(t)$):

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right) \mathrm{d}t$$

kde veličina v závorce je derivací funkce $\boldsymbol{r}$ podle t a $\mathrm{d}t$ je v principu libovolná časová změna (v praxi je však tato změna velmi často brána jako „dostatečně malá“).

2.2 Rychlost

Rychlost ve fyzice zavádíme na několik navzájem souvisejících způsobů: skalárně i vektorově a jako střední (průměrnou) i jako okamžitou. Seznamme se s nimi postupně (podrobnější fyzikální rozbor je uveden např. ve skriptu [9]):

- Pro hmotný bod, který za čas Δt urazí dráhu Δs, definujeme tzv. *střední dráhovou rychlost*:[8]
$$\langle v_d \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s(t_i + \Delta t) - s(t_i)}{\Delta t} \equiv \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2.8}$$

- Zkracujeme-li časový interval nade všechny meze, přicházíme k definici tzv. *okamžité dráhové rychlosti* (někdy jen dráhová rychlost) v čase t_i:[9]
$$v_d(t_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_i + \Delta t) - s(t_i)}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2.9}$$

- Vektorově zavádíme tzv. *střední rychlost* vztahem:
$$\langle \boldsymbol{v} \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{r}(t_i + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_i)}{\Delta t} \equiv \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}. \tag{2.10}$$

- *(Okamžitou) rychlost* v čase t_i pak zavádíme jako
$$\boldsymbol{v}(t_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}(t_i) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_i + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_i)}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}. \tag{2.11}$$

  Rychlost částice v čase t_i je tedy vektorová veličina, která charakterizuje časovou změnu polohového vektoru $\boldsymbol{r}(t)$ v tomto čase. Matematicky je definována jako derivace vektorové funkce $\boldsymbol{r}(t)$ podle času v okamžiku t_i (tj. nejprve se provede derivace funkce $\boldsymbol{r}(t)$ a konkrétní hodnota t_i se dosadí až do argumentu této derivace. Fyzikálně rychlost částice $\boldsymbol{v}$ v čase t_i vyjadřuje, kolik metrů (jednotek délky) by částice urazila během jedné sekundy (jednotky času) a jakým směrem, kdyby se od okamžiku t_i nadále pohybovala rovnoměrně přímočaře.

  Stejně jako směr diferenciálu vektoru posunutí, je směr vektoru rychlosti $\boldsymbol{v}(t_i)$ tečný k trajektorii v bodě $\boldsymbol{r}(t_i)$ a jeho orientace je dána směrem pohybu částice. V důsledku toho můžeme rychlost vyjádřit pomocí již zavedeného jednotkového vektoru $\boldsymbol{\tau}^\circ(t)$
$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}^\circ = v\boldsymbol{\tau}^\circ, \tag{2.12}$$

[8] Všimněte si, že střední dráhová rychlost je veličina, která závisí nejen na počátečním, ale i na koncovém okamžiku pohybu. Můžeme také říci, že závisí na t i na Δt. Z kontextu by vždy mělo být zřejmé, o který okamžik t a o který časový interval Δt jde – místo zápisu $\langle v_d \rangle(t, \Delta t)$ se tedy obvykle píše pouze $\langle v_d \rangle$. Obdobně se postupuje i v dalších veličinách jako například u vektoru posunutí a střední (okamžité) rychlosti (viz dále).

[9] Na rozdíl od své „střední“ sestry, přísluší okamžitá dráhová rychlost jedinému okamžiku t_i. Obdobně i dále.

kde $v \equiv |\boldsymbol{v}| \equiv |\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t| = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ je velikost rychlosti. Tento vztah získáme formálně podělením vztahu 2.7 malou (diferenciální) časovou změnou. Pomocí rychlosti tak můžeme (pomocí věty o substituci v integrálu) přepsat vyjádření pro dráhu uraženou částic od okamžiku t_i do okamžiku t_f na (viz vztah 2.6):

$$\Delta s_{if} = \int_{t_i}^{t_f} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{t_i}^{t_f} |\boldsymbol{v}|\mathrm{d}t \equiv \int_{t_i}^{t_f} v\mathrm{d}t \tag{2.13}$$

Na střední škole se obvykle *střední rychlost* nazývá rychlostí *průměrnou*. Důvod, proč není užíván tento název i zde je v tom, že středoškolský název silně navozuje představu, že se tato rychlost počítá jako *aritemtický průměr*, což obecně není pravda. Naproti tomu se v celé fyzice pro určování *střední hodnoty* nějaké veličiny $f(t)$ v časovém intervalu $\langle t_i; t_f \rangle$ standardně užívá definice

$$\langle f \rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} f(t)\mathrm{d}t.$$

V případě rychlosti pak vzhledem platnosti 2.13 bude

$$\langle v \rangle = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} v(t)\mathrm{d}t = \frac{s(t_f) - s(t_i)}{t_f - t_i},$$

což se shoduje s 2.8

V soustavě SI je jakýkoliv druh rychlosti obvykle měřen v jednotkách

$$[v] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

2.3 Zrychlení

Obdobně k zavedení rychlosti, která nám slouží k postižení **změn polohového vektoru v čase**, zavádíme další veličinu, která nám „naoplátku“ umožňuje popsat **změny rychlosti v čase**. Takovouto veličinu nazýváme *zrychlení*. K různě zavedeným rychlostem existují i odpovídající zrychlení. My se na tomto místě budeme zabývat pouze zrychlením odpovídajícímu vektoru okamžité rychlosti.

Zrychlení $\boldsymbol{a}$ je vektorová veličina charakterizující změnu rychlosti částice v jednom konkrétním okamžiku (v nekonečně malém časovém intervalu). Je definována jako derivace vektoru rychlosti podle času, tj.

$$\boldsymbol{a}(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t + \Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{2.14}$$

Z výrazu 2.12 získáme jeho časovou derivací vztah

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}(v\boldsymbol{\tau}^\circ)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\tau}^\circ + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ}{\mathrm{d}t} \tag{2.15}$$

jehož první sčítanec budeme interpretovat jako *tečné zrychlení* a druhý jako *zrychlení normálové* (častěji ovšem jako *zrychlení dostředivé*). K tomu nás vedou následující důvody.

Je ihned vidět, že první člen je součinem derivace jež má rozměr zrychlení a tečného jednotkového vektoru – název *tečné zrychlení* pro vektor

$$\boldsymbol{a_t} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathrm{d}v/\mathrm{d}t)\boldsymbol{\tau}^\circ$$

je tedy přiléhavý. Velikost tohoto vektoru je určena změnou **velikosti rychlosti**. Pohybuje-li se tedy částice po trajektorii nerovnoměrně, tj. mění-li se velikost její rychlosti, je $\boldsymbol{a_t} \neq \mathbf{0}$.

Interpretace druhého členu (ozn. $\boldsymbol{a_n}$) je poněkud složitější. Nejprve jej upravme pomocí předpokladu, že jednotkový tečný vektor $\boldsymbol{\tau}^\circ$ je funkcí dráhové souřadnice,[10] tj. že $\boldsymbol{\tau}^\circ = \boldsymbol{\tau}^\circ(s(t))$ a pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v^2\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ}{\mathrm{d}s}$$

přitom uvažme, že výraz $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ/\mathrm{d}s$ vyjadřuje limitní změnu tečného vektoru v závislosti na změně dráhové souřadnice s. Derivujeme-li nyní rovnost $\boldsymbol{\tau}^\circ \cdot \boldsymbol{\tau}^\circ = 1$ podle s, získáme

$$2\boldsymbol{\tau}^\circ \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ}{\mathrm{d}s} = 0 \qquad (2.16)$$

z čehož po krácení dvojkou plyne, že vektory $\boldsymbol{\tau}^\circ$ a $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ/\mathrm{d}s$ jsou na sebe v každém okamžiku kolmé. Jednotkový vektor mající směr a orientaci vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ/\mathrm{d}s$ označíme $\boldsymbol{n}^\circ$ a budeme mu říkat *normálový jednotkový vektor* (odtud název „normálové zrychlení“). Orientaci určíme touto úvahou: Protože pro velmi krátký úsek $\mathrm{d}s$ je diferenciál tečného jednotkového vektoru roven rozdílu tečných vektorů v jednotlivých úsecích trajektorie, tj. $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ = \boldsymbol{\tau}^\circ(s_i + \mathrm{d}s) - \boldsymbol{\tau}^\circ(s_i)$, je z obr. 2.1 vidět, že vektor $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ$, a tedy i vektor $\boldsymbol{n}^\circ$, míří na tu stranu, na kterou se trajektorie zakřivuje. Můžeme tedy psát

$$\boldsymbol{a_n} = v^2\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ}{\mathrm{d}s}\right|\boldsymbol{n}^\circ. \qquad (2.17)$$

Nyní zjistíme čemu je rovno $|\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ/\mathrm{d}s|$.

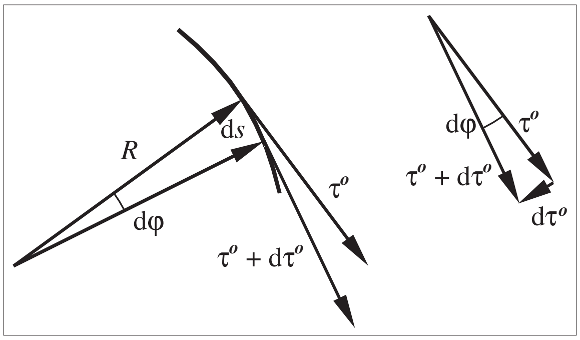
Z obrázků 2.1 a 2.2 je rovněž patrné, že pro infinitezimální změny platí

$$\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ|}{|\boldsymbol{\tau}^\circ|} = \mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}s}{R}, \qquad (2.18)$$

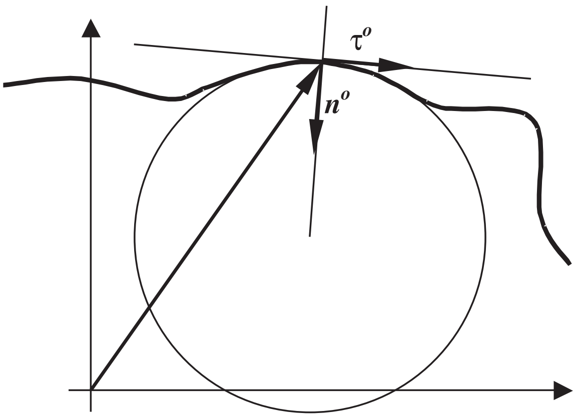
kde R je poloměr tzv. *oskulační kružnice*, což je nejlépe přiléhající kružnice v daném místě trajektorie.[11] Střed této kružnice samozřejmě leží na normále (kolmici) k tečně trajektorie

[10] Pozor, neplést si dráhovou souřadnici s, která z definice může být kladná i záporná a dráhu Δs resp. její diferenciál $\mathrm{d}s$, což je veličina vždy kladná.

[11] Prohlášení, že R je poloměr „nejlépe přiléhající kružnice v daném místě trajektorie“ má svůj přesný matematický význam, my se však pro jednoduchost smíříme s jeho intuitivním chápáním. Samozřejmě, pokud se částice pohybuje po kružnici, je tato zároveň kružnicí oskulační.



Obrázek 2.1: Změny tečného vektoru.



Obrázek 2.2: Tečna, normála a oskulační kružnice.

částice a jednotkový normálový vektor tak míří do středu této kružnice (odtud název „dostředivé" zrychlení). Protože však platí ds = |ds|, máme konečně (ztotožňujeme-li podíl diferenciálů s derivací)

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}^\circ}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{1}{R}. \tag{2.19}$$

Celkem pro dostředivé zrychlení tak dostáváme

$$\boldsymbol{a_n} = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{n}^\circ. \tag{2.20}$$

Uvědomme si, že zatímco pro vektor tečného zrychlení je důležitá změna **velikosti** rychlosti, zrychlení dostředivé vzniká v důsledku změn **směru** rychlosti (tj. změn jednotkového vektoru $\boldsymbol{\tau}^\circ$).

V každém okamžiku pohybu částice tedy můžeme vektor zrychlení $\boldsymbol{a}$ rozložit na navzájem kolmé vektory $\boldsymbol{a_t}$ a $\boldsymbol{a_n}$, přičemž obecně platí

$$\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a_t}(t) + \boldsymbol{a_n}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\boldsymbol{\tau}^\circ(t) + \frac{v^2(t)}{R(t)}\boldsymbol{n}^\circ(t). \tag{2.21}$$

V soustavě SI je jednotkou užívanou při měření zrychlení

$$[a] = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

2.3.1 Pohyb s konstantním zrychlením

Pohyby s konstantním zrychlením se někdy nazývají *rovnoměrně proměnné pohyby.* Pokud je zrychlení konstantní, budou konstantní i všechny jeho kartézské souřadnice, tj. je-li $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$, bude

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \kappa_x, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \kappa_y, \quad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \kappa_z, \tag{2.22}$$

kde výrazem κ_j označujeme (a i nadále budeme označovat) blíže neurčenou konstantu. Integrujeme-li každou složku zvlášť, máme

$$v_x = \int_{t_i}^{t_f} a_x \mathrm{d}t = a_x(t_f - t_i) \quad \text{a obdobně s } y \text{ a } z. \tag{2.23}$$

Někdy je výhodné „integrovat neurčitě“ a význam integrační konstanty (ozn. κ') zjistit z počátečních podmínek

$$v_j(t) = \int a_j \mathrm{d}t = \kappa'_j + a_j t, \tag{2.24}$$

kde index j je roven po řadě x, y a z. Měříme-li od nulového počátečního času, bude $v_j(t = 0) \equiv v_{j0} = \kappa'_j$. Má-li tedy částice na počátku měření rychlost $\boldsymbol{v_0} = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j} + v_{0z}\boldsymbol{k}$, můžeme pro jednotlivé souřadnice rychlosti rovnoměrně proměnného pohybu s konstantním zrychlením psát

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x0} + a_x t, \\ v_y(t) &= v_{y0} + a_y t, \\ v_z(t) &= v_{z0} + a_z t, \end{aligned}$$

nebo kompaktněji též

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v_0} + \boldsymbol{a}t. \tag{2.25}$$

Časovou závislost kartézských souřadnic polohového vektoru $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$ můžeme obdobně (neurčitou integrací) vypočítat z již určených složek rychlosti, předpokládáme-li opět, že měření začalo v čase $t = 0$, kdy částice měla polohu $\boldsymbol{r_0} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} + z_0\boldsymbol{k}$ a rychlost $\boldsymbol{v_0} = v_{0x}\boldsymbol{i} + v_{0y}\boldsymbol{j} + v_{0z}\boldsymbol{k}$, tj.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int (v_{x0} + a_x t)\mathrm{d}t = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \\ y(t) &= \int (v_{y0} + a_y t)\mathrm{d}t = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2, \\ z(t) &= \int (v_{z0} + a_z t)\mathrm{d}t = z_0 + v_{z0}t + \frac{1}{2}a_z t^2. \end{aligned} \tag{2.26}$$

V sevřené vektorové formě můžeme psát

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r_0} + \boldsymbol{v_0}t + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2. \tag{2.27}$$

Podobným způsobem lze odvodit analogické rovnice pro dráhovou souřadnici a dráhovou rychlost, a to v případě, kdy je konstantní pouze velikost tečného zrychlení:

$$v(t) = v_0 \pm a_t t, \tag{2.28}$$

$$s(t) = s_0 + v_0 t \pm \frac{1}{2}a_t t^2. \tag{2.29}$$

Znaménko „+“ nebo „−“ zavádíme v závislosti na tom, jestli částice zvyšuje nebo snižuje svoji velikost rychlosti, tj. je-li $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ větší nebo menší než nula. Platnost těchto rovnic můžeme rozšířit i na samotnou dráhu a velikost rychlosti, musíme však potom mít na paměti, že pak jsou uvedené rovnice omezeny nezáporností dráhy a velikosti rychlosti.

Velmi názornou aplikaci mají výše uvedené vztahy při popisu pohybu částic v homogenním tíhovém poli ve vakuu (vrhy). Experimentálně se totiž ukázalo (G. Galilei a následovníci), že můžeme-li zanedbat odpor vzduchu, padají všechna tělesa v blízkosti zemského povrchu s konstantním zrychlením $\boldsymbol{g}$ ($g \approx 9,8$ m/s^2).[12] Protože trajektorie padajícího tělesa leží v jedné rovině, získáme z 2.27 časové závislosti souřadnic polohy a rychlosti pro obecný případ šikmého vrhu (viz obr 2.3):

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x0}, \\ v_y(t) &= v_{y0} - gt, \\ x(t) &= x_0 + v_{x0}t, \\ y(t) &= y_0 + v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2. \end{aligned}$$

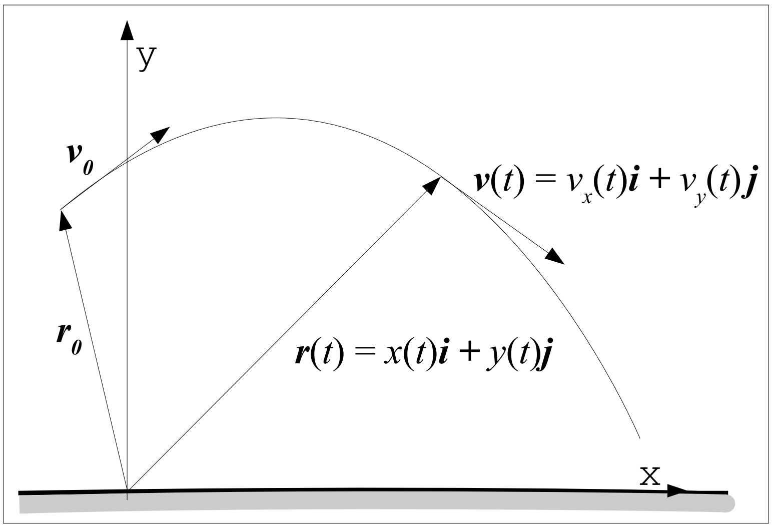
Při vyjádření velikosti rychlosti a uražené dráhy si musíme uvědomit, že i když se částice v tíhovém poli pohybuje s konstantním zrychlením, tečná (a tedy i normálová) složka zrychlení se v jednotlivých bodech její trajektorie obecně mění. Nemůžeme proto v tomto případě použít rovnice 2.29 a 2.28. Tyto veličiny musíme počítat jako

$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)}, \quad \Delta s(t) = \int_0^t v(t')\mathrm{d}t'. \tag{2.30}$$

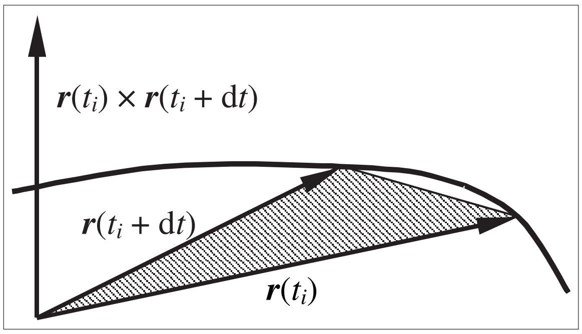
2.4 Cyklický pohyb v rovině (obíhání)

Nyní z formálního hlediska prostudujeme popis cyklických pohybů v rovině, jejichž speciálním případem je pohyb částice po kružnici (tímto typem pohybů se **Fyzika** zabývá až v kapitole 11 Rotace). Nejprve se budeme zabývat vektorovou veličinou přiřazenou ploše.

[12]Toto tvrzení samozřejmě není přesné, už jen proto, že Země je kulatá a má-li vektor tíhového zrychlení mířit kamsi ke středu Země, bude se směr tohoto vektoru místo od místa měnit. Přesnější by bylo tvrzení, že v dostatečně malém okolí nějakého místa na Zemi (~ 1 km^3) se tíhové zrychlení téměř nemění.



Obrázek 2.3: K vrhům



Obrázek 2.4: K vektorovému součinu.

Z vektorového počtu víme, že umístíme-li dva vektory do společného počátku, bude obsah trojúhelníku daného počátkem a koncovými body těchto vektorů dán polovinou velikosti jejich vektorového součinu. Protože zkoumanou částici při jejím pohybu doprovází polohový vektor $\boldsymbol{r}(t)$,[13] můžeme pro plochu ΔP trojúhelníku sevřeného vektory $\boldsymbol{r}(t_i)$ do $\boldsymbol{r}(t_f)$ psát (viz obr. 2.4)

$$\Delta P = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}(t_i) \times \boldsymbol{r}(t_f)| \equiv \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}(t_i) \times \boldsymbol{r}(t_i + \Delta t)| = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}(t_i) \times (\boldsymbol{r}(t_i + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_i))|, \quad (2.31)$$

kde pro zatím významově nepříliš zřejmou poslední rovnost byla užita známá vlastnost vektorového součinu – $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$. Pro dostatečně krátké časy $\mathrm{d}t$ se bude skutečná plocha opsaná průvodičem stále méně lišit od trojúhelníku vymezeného počátečním a koncovým polohovým vektorem. Změnu vektorové funkce v poslední závorce pak můžeme nahradit

[13] Z tohoto důvodu se mu také někdy říká průvodič.

diferenciální změnou d$\boldsymbol{r}$ a vztah 2.31 pak můžeme přepsat na

$$\mathrm{d}\boldsymbol{P}(t_i) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{r}(t_i) \times (\boldsymbol{r}(t_i + \mathrm{d}t) - \boldsymbol{r}(t_i)) = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{r}(t_i) \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{2.32}$$

Všimněme si, že nyní byly vynechány absolutní hodnoty a první uvedená rovnost se tak vlastně stala definicí diferenciálu jisté vektorové veličiny. Velikost tohoto diferenciálu souhlasí s (infinitezimální) velikostí plochy, jeho směr je na tuto plošku kolmý a jeho orientace je dána poloprostorem, ze kterého se tendence oběhu částice kolem počátku soustavy souřadnic jeví jako kladná, tj. mířící proti směru hodinových ručiček.[14]

Zajímejme se nyní o stále se opakující, tzv. *cyklický*, *pohyb* v rovině (například elektron pohybující se po kružnici v magnetickém poli). Částice samozřejmě může obíhat nerovnoměrně a stejně tak nerovnoměrně bude narůstat i příslušná opsaná plocha. K postižení takovýchto změn zavedeme vektor *plošné rychlosti* $\boldsymbol{w}$ jako časovou derivaci vektoru plochy v okamžiku t_i, tj.

$$\boldsymbol{w}(t_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}(t_i)}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{1}{2}\,\boldsymbol{r}(t_i) \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t_i)}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\,\boldsymbol{r}(t_i) \times \boldsymbol{v}(t_i). \tag{2.33}$$

Tuto veličinu si dobře zapamatujte, protože vynásobíme-li ji dvojnásobkem hmotnosti částice, získáme jednu z nejdůležitějších veličin ve fyzice – moment hybnosti ($\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$). Plošná rychlost je tedy, až na konstantu, rovna momentu hybnosti.[15] Nyní se konečně vrhněme na studium pohybu po kružnici.

Existuje spousta fyzikálně významných úloh, u kterých se při popisu cyklického pohybu částice po uzavřené (rovinné) křivce vůbec nemusíme starat o vzdálenost R částice od jakéhosi středu (např. osy otáčení). Obvykle nás pouze zajímá, jakou část „oběžného cyklu“ už má částice za sebou nebo jak rychle se tento cyklus snaží dokončit. Děje-li se pohyb částice například v rovině xy, jde nám o úhel (a o změny tohoto úhlu), který svírá polohový vektor částice např. s osou x. Je-li pohyb cyklický, ukončí částice „oběh“ počátku za nějakou dobu T, tj. za tuto dobu se onen úhel změní o 2π. Zajímáme-li se pouze o pohyb po kružnici, je to jednoduché – její poloměr R se nemění a tak veličinu ω charakterizující rychlost obíhání můžeme definovat jako[16]

$$\langle\omega\rangle = \frac{\frac{2\pi R}{T}}{R} = \frac{2\pi}{T}. \tag{2.34}$$

Této veličině ze zřejmých důvodů říkáme *střední úhlová rychlost* a je použitelná i v případě

[14]Důvod, proč je definován pouze diferenciál plochy a nikoli vektor plochy jako takový je v tom, že obecné (nerovinné) ploše nelze jediný vektor přiřadit. Pokud se ovšem zajímáme pouze o plochy rovinné, jež jsou ohraničené (rovinnými) pohyby částic, přiřazujeme jim vektor jehož velikost bude souhlasit s jejich velikostí, jeho směr bude k těmto plochám kolmý a orientaci bude mít opět do toho poloprostoru, ze kterého se bude směr jejího obíhání částicí jevit kladným. Takový vektor můžeme nazvat *vektor plochy.*

[15]Toto prohlášení je však poněkud zavádějící, podobně jako prohlášení, že hybnost je až na konstantu rovna rychlosti. Na druhou stranu je pravda, že význam oné konstanty (hmotnosti) v této definici oceníme až při studiu srážek – při popisu prostého pohybu nás prakticky nezajímá.

[16]Přesně v rámci hesla: „Chceš-li se něčeho ve fyzice či v matematice zbavit, zkus tím podělit.“

„nekružnicových“ pohybů.[17] Z její jednotky $[\omega] = \mathrm{s}^{-1}$ je zřejmé, že jsme se závislosti na jakékoliv vzdálenosti opravdu zbavili. Jenže s tímto výsledkem se nemůžeme spokojit – zaprvé, ve fyzice ve velké většině případů dáváme přednost veličinám určeným v jediném okamžiku, chtěli bychom tedy k definici nové veličiny užít **okamžité** rychlosti, a zadruhé, rychlost je obecně vektor, nedala by se tedy úhlová rychlost rovněž definovat jako vektorová veličina? Ukazuje se, že takovou veličinu zavést můžeme.

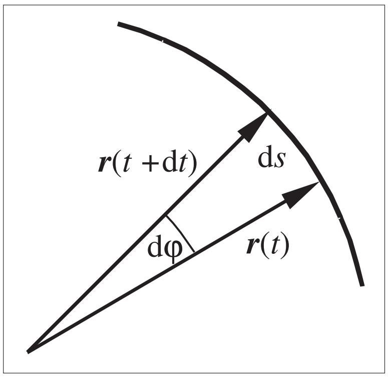
Protože střední úhlová rychlost byla ve svém důsledku definována jako podíl úhlu $\Delta\varphi$ uraženého během nějakého časového intervalu o velikosti Δt, tj.

$$\langle\omega\rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \tag{2.35}$$

bude se jistě logickou definicí velikosti *okamžité úhlové rychlosti* ω jevit vztah

$$\omega \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}. \tag{2.36}$$

Nyní přistupme k úplné definici. Již na začátku tohoto článku jsme si ukázali, že částici obíhající v rovině kolem počátku souřadnicové soustavy lze přiřadit vektor – konkrétně vektor kolmý na plochu, kterou opsal její polohový vektor. Rychlost s jakou se mění opsaná plocha byla rovněž charakterizována vektorem – plošnou rychlostí $\boldsymbol{w}$. Snad lze alespoň matně vytušit, že by mohla existovat nějaká souvislost mezi definicí úhlové rychlosti a $\boldsymbol{w}$. Pokusme se takovou souvislost najít. Jak lze vidět z obr. 2.5, úhel $\mathrm{d}\varphi$ mezi $\boldsymbol{r}(t)$ a $\boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t)$ lze nalézt takto:



Obrázek 2.5: K souvislosti plošné a úhlové rychlosti.

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\mathrm{d}s}{r} = \frac{|\boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t) - \boldsymbol{r}(t)|}{|\boldsymbol{r}(t)|}. \tag{2.37}$$

[17]Pokud vám ony „zřejmé důvody“ nepřipadají zase až tak zřejmé, vězte, že veličina $2\pi R$ je celková dráha uražená za celkový čas oběhu T, tedy poměr $2\pi R/T$ je střední dráhová rychlost při jednom oběhu. Přívlastek „úhlová“ pochází z toho, že ω je určena tím, jaký úhel za sekundu částice ve svém průměru kolem počátku urazí – je to právě tolik radiánů, aby za T sekund uskutečnila celý oběh, tj. 2π radiánů.

Protože můžeme psát $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{r}^\circ$ a $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{v}^\circ$, bude

$$\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\,rv(\boldsymbol{r}^\circ \times \boldsymbol{v}^\circ) = \frac{1}{2}\,r\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}^\circ \times \boldsymbol{v}^\circ) = \frac{1}{2}\,r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r}^\circ \times \boldsymbol{v}^\circ).^{18} \tag{2.38}$$

Vidíme, že plošná rychlost má až na $r^2/2$ stejnou velikost jako úhlová rychlost. Budeme-li tedy úhlovou rychlost definovat jako

$$\boldsymbol{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}}{r^2} \equiv \frac{2}{r^2}\,\boldsymbol{w}, \tag{2.39}$$

bude mít směr a orientaci stejnou jako již zavedená plošná rychlost a požadovanou velikost $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$. Takto zavedená úhlová rychlost tedy splňuje všechny intuitivní předpoklady na ni kladené. Prozkoumejme to na jednoduchém příkladě.

Zajímáme-li se pouze o pohyb (ne nutně rovnoměrný) částice po kružnici, volíme obvykle počátek **O** souřadnicové soustavy ve středu kružnice. Označíme-li poloměr kružnice R jak je obvyklé, označme $\boldsymbol{R}$ polohový vektor částice pohybující se po kružnici. Potom úhlová rychlost bude

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{v}}{R^2} \tag{2.40}$$

a protože při tomto druhu obíhání je vždy rychlost $\boldsymbol{v}$ kolmá na polohový vektor $\boldsymbol{R}$ (má vždy směr tečny k trajektorii), bude velikost úhlové rychlosti se zbylými veličinami svázána často užívaným vztahem

$$\omega = \frac{v}{R}. \tag{2.41}$$

Vektorovým vynásobením rovnice 2.40 zprava vektorem $\boldsymbol{R}$, užitím důležité vektorové identity

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^{19} \tag{2.42}$$

a uvážením, že v našem případě je $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{R} = 0$, získáme přehledný vztah

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}. \tag{2.43}$$

Modifikace tohoto vztahu se často užívá při popisu pohybu tuhých těles ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}, \tag{2.44}$$

při vyšetřování pohybu částic v tzv. neinerciálních soustavách.

Vektor *úhlového zrychlení* $\boldsymbol{\varepsilon}$ zavádíme v úplné analogii s vektorem „obyčejného“ zrychlení – časovou derivací vztahu 2.39:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}. \tag{2.45}$$

[18] Bylo opět užito záměny derivace a podílu diferenciálů.

[19] Platnost této identity lze ověřit například rozepsáním zúčastněných vektorů do kartézských souřadnic.

Pro pohyb po kružnici ($\boldsymbol{R} = R\boldsymbol{R}^\circ = \boldsymbol{R_0}$) platí (viz 2.18)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}, \tag{2.46}$$

což vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{R} \uparrow\downarrow \boldsymbol{n}^\circ$ dává (viz též vztah 2.21)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{v}}{R^2}\right) = \frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{a}}{R^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\frac{\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{\tau}^\circ}{R^2} = \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}(\boldsymbol{R}^\circ\times\boldsymbol{\tau}^\circ). \tag{2.47}$$

Při pohybu po kružnici má tedy úhlové zrychlení stejný směr jako úhlová rychlost (kolmo na rovinu kružnice), jeho velikost je v souladu s intuicí rovna $\mathrm{d}^2\varphi/\mathrm{d}t^2$ a orientace je dána tím, jestli úhlová rychlost roste (kladná), nebo klesá (záporná).[20]

Všimněme si na závěr, že jak vektor plošné rychlosti, tak vektory úhlové rychlosti a úhlového zrychlení závisí, na rozdíl od rychlosti či zrychlení, na volbě počátku soustavy souřadnic. Nejsou to tedy vektory v pravém slova smyslu, tj. nejsou to objekty zcela nezávislé na souřadnicové soustavě.

2.5 Klasifikace pohybů

Dobře si promyslete následující tabulku, kde index 0 značí konstantnost (ale nenulovost) dané veličiny, index „i“ hodnotu na počátku v čase $t = 0$ (počáteční hodnota) a výraz (t) obecnou závislost veličiny u níž stojí na čase. V níže uvedených vztazích značí s dráhovou souřadnici (tj. nikoli dráhu) a v velikost rychlosti, tj. veličinu $|\boldsymbol{v}|$.

pohyb	s	v	$\boldsymbol{\tau}^\circ$	$\boldsymbol{a_t}$	$\boldsymbol{a_n}$
rovnoměrný přímočarý	$s_\mathrm{i} \pm v_0 t$	v_0	$\boldsymbol{\tau_0^\circ}$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{0}$
rovnoměrný křivočarý	$s_\mathrm{i} \pm v_0 t$	v_0	$\boldsymbol{\tau}^\circ(t)$	$\boldsymbol{0}$	$\boldsymbol{a_n}(t)$
rovnoměrný po kružnici	$s_\mathrm{i} \pm v_0 t$	v_0	$\boldsymbol{\tau}^\circ(t)$	$\boldsymbol{0}$	a_{n0}
rovnoměrně proměnný přím.	$s_\mathrm{i} \pm v_\mathrm{i} t \pm \frac{1}{2} a_{t0} t^2$	$v_\mathrm{i} \pm a_{t0} t$	$\boldsymbol{\tau_0^\circ}$	$\boldsymbol{a_{t0}}$	$\boldsymbol{0}$
rovnoměrně proměnný křiv.	$s_\mathrm{i} \pm v_\mathrm{i} t \pm \frac{1}{2} a_{t0} t^2$	$v_\mathrm{i} \pm a_{t0} t$	$\boldsymbol{\tau}^\circ(t)$	a_{t0}	$\boldsymbol{a_n}(t)$
nerovnoměrný přímočarý	$s(t)$	$v(t)$	$\boldsymbol{\tau_0^\circ}$	$\boldsymbol{a_t}(t)$	$\boldsymbol{0}$
nerovnoměrný křivočarý	$s(t)$	$v(t)$	$\boldsymbol{\tau}^\circ(t)$	$\boldsymbol{a_t}(t)$	$\boldsymbol{a_n}(t)$

[20] Pro úhlovou rychlost částice pohybující se po kružnici lze ze vztahu 2.40 analogicky odvodit $\boldsymbol{\omega} = (\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t)(\boldsymbol{R}^\circ\times\boldsymbol{\tau}^\circ)$.

Kapitola 3

Předvídání budoucnosti aneb Newtonovy zákony

Cíle

1. Umět názorně vysvětlit pojmy: interakce, volná částice, inerciální vztažná soustava, laboratorní a Galileiova vztažná soustava, setrvačnost.
2. Znát vztah setrvačnosti a hmotnosti.
3. Umět vysvětlit 1. Newtonův zákon.
4. Znát význam zavedení síly jako popisu interakce.
5. Znát význam pojmů: tíhová síla, normálová síla, třecí síla a tahová síla.
6. Umět formulovat 2. Newtonův zákon (obecně i na konkrétních příkladech)
7. Umět 2. Newtonův zákon aplikovat v praxi (resp. při zadání školských úloh).
8. Znát fyzikální význam 3. Newtonova zákona.
9. Znát vlastnosti sil tření a dalších odporových sil.
10. Vědět co je to tekutina a co mezní rychlost.
11. Umět využívat vztahu pro dostředivé zrychlení v případech, kdy se těleso pohybuje po kružnici (pozor, nepoužívejte pojmu „dostředivá síla“).

Pokyny

1. Prostudujte kapitolu 5 **Síla a pohyb I**.
2. Prostudujte kapitolu 6 **Síla a pohyb II**.

3. Prostudujte dodatky k tomuto tématu.

Kontroly

1. Poctivě projděte všechny kontroly v doporučených kapitolách a odpovězte na otázky za jednotlivými kapitolami.

2. Řešte úlohy: **k odst. 5.3** — 3Ú; **k odst. 5.5** — 6C, 8C, 10Ú; **k odst. 5.6** — 14C, 18C; **k odst. 5.8** — 23C, 27C, 29C, 33C, 39Ú, 41Ú, 42Ú, 43Ú, 47Ú, 49Ú, 52Ú*, 53Ú*, 54Ú*, 60Ú, 61Ú, 65Ú, 66Ú*, 67Ú, 70Ú*; **k odst. 6.2** — 5C*, 6C*, 7C, 11C, 16Ú, 17Ú, 19Ú*, 25Ú, 27Ú, 32Ú, 38Ú, 41Ú, 43Ú*; **k odst. 6.3** — 46C; **k odst. 6.4** — 49C, 53C, 55C, 56C*, 58C*, 59Ú, 63Ú, 65Ú, 68Ú, 71Ú, 72Ú*.

3. Řešte úlohy pro počítač*.

Dodatky

3.1 Poznámky k Newtonovým zákonům

Při studiu *dynamiky* se zabýváme **příčinami** mechanického pohybu. Na rozdíl od kinematiky, kde jsme se snažili popsat, **jak** se něco hýbe, dynamika pomáhá popsat i to **proč** se něco hýbe.

Jak již bylo uvedeno v předchozích Dodatcích, musíme popis pohybu částic i těles vždy vztahovat vzhledem k jiným objektům, tzv. *vztažným tělesům*. Přiřadíme-li ke vztažnému tělesu soustavu souřadnic a dohodneme-li se na způsobu měření času, dostáváme *vztažnou soustavu*. První Newtonův zákon tvrdí, že existuje třída vztažných soustav – tzv. *inerciálních vztažných soustav* – ve kterých je popis pohybu volných částic zvlášť jednoduchý: částice se vůči nim buď nacházejí v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu. Newton tímto zákonem sděluje, pro jaké souřadnicové soustavy bude platit jeho druhý zákon (zákon pohybu). Druhý pohybový zákon tedy neplatí ve všech vztažných soustavách, ale jen v těch inerciálních. Třetí Newtonův zákon se již netýká samotného pohybu, ale popisuje vlastnosti sil (interakce).

Při vyslovování druhého Newtonova zákona je vhodné popisovat vztah

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m}, \tag{3.1}$$

a to například takto: Je-li částice o konstantní hmotnosti m podrobena silám působících těles a polí, jejichž výslednice je $\boldsymbol{F}$, bude se pohybovat se zrychlením $\boldsymbol{a}$ ve směru $\boldsymbol{F}$. Vzhledem k tomu, že je vždy $m > 0$, mají tyto vektory stejný směr a jsou stejně orientovány. Velikost zrychlení $|\boldsymbol{a}|$ je přímo úměrné velikosti výslednice sil $|\boldsymbol{F}|$, při konstantní síle bude velikost zrychlení částice tím větší, čím menší bude její hmotnost.

Setrvačnost je vlastnost těles, která vyjadřuje jejich odpor ke změně své rychlosti – působí-li na volné těleso v inerciální vztažné soustavě konstantní síla, bude „hůře“ měnit velikost či směr rychlosti to těleso, které má větší setrvačnost než těleso, které ji má menší. Mírou setrvačnosti tělesa je jeho *hmotnost*.[1] Čím má těleso větší setrvačnost, tím má i větší hmotnost a naopak, tělesa s malou hmotností mají malou setrvačnost, tj. snadněji mění svoji rychlost. Setrvačnost těles je tedy vlastnost, která říká, že k tomu abychom změnili rychlost nějakého tělesa byť jen o malý kousek, potřebujeme působení síly, která musí být tím větší, čím má těleso větší setrvačnost a tedy i hmotnost. Názorně lze výše uvedené ilustrovat na takovémto příkladu: nechť jsou do vesmírného prostoru stejnou rychlostí vrženy tenisový míček a medicinbal. Pokud na tělesa nezačne působit nějaká síla, budou se pohybovat dál po přímce až do nekonečna (je-li vesmír nekonečný:-)). Tento stav se změní jedině tehdy, když se dostanou do nějakého silového pole nebo když na něco narazí. Udeříme-li stejným způsobem baseballovou pálkou do míčku i do medicinbalu, změní se rychlost míčku daleko podstatněji než rychlost medicinbalu.[2]

3.2 Řešení pohybových rovnic

Jedna z nejdůležitějších úloh mechaniky vybudované na Newtonových zákonech zní: Jaké pohyby vykonává mechanická soustava (nebo její část), známe-li hmotnosti příslušných částí soustavy a víme-li jak na sebe tyto části působí a jak na soustavu působí okolí. Přímočarý postup je tento: Zvolíme si vztažnou soustavu (s vhodnou volbou souřadnicového systému) a v ní vyjádříme všechny důležité působící síly, počáteční polohy a rychlosti částí soustavy. Ze znalosti sil a hmotností nám druhý Newtonův zákon umožní sestavit soustavu obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu (pohybové rovnice mechanické soustavy). Vyřešením takovéto úlohy obvykle máme na mysli nalezení řešení těchto rovnic za daných počátečních podmínek. V zásadě známe dvě metody hledání řešení: buď pomocí exaktních metod matematické analýzy nebo pomocí numerické matematiky (nejčastěji za pomoci počítače)?[3]

[1] Takto „definovaná“ hmotnost bývá přesněji nazývána *setrvačnou hmotností*, na rozlišení od tzv. *gravitační hmotnosti*, na které závisí velikost gravitační síly na těleso působící. Tyto hmotnosti si jsou z neznámých důvodů přímo úměrné, resp. ve vhodných jednotkách (kilogramech) jsou vyjádřeny stejnou číselnou hodnotou. Hluboká souvislost mezi setrvačností a gravitací, která se projevuje i v rovnosti setrvačné a gravitační hmotnosti, posloužila Albertu Einsteinovi k doposud nejlepšímu popisu gravitačního působení. Tento popis byl nazván *obecná teorie relativity*.

[2] Může se zdát, že je zbytečné mluvit o takových „na první pohled zřejmých“ věcech, ale je nutné si je důkladně promyslet, protože ve složitějších situacích nebo za jiných podmínek (mikrosvět) již tak zřejmé být nemusí.

[3] Mezi těmito obory ovšem existuje silné prolnutí.

Kapitola 4

Práce, výkon, energie

Cíle

1. Znát definici mechanické práce (obecnou i pro speciální případy) a kinetické energie (a jejího omezení).
2. Umět užívat vztahu mezi prací a kinetickou energií k řešení úloh.
3. Umět na konkrétním příkladě vysvětlit pojem síla pružnosti a umět spočítat práci této síly.
4. Umět definovat výkon jako fyzikální veličinu.
5. Umět vysvětlit princip invariance.
6. Vědět, jaký je rozdíl mezi silami konzervativními a silami nekonzervativními.
7. Znát vlastnosti potenciální energie (zejména její souvislost s prací konzervativních sil a význam referenčního bodu) a některé její druhy.
8. Vědět co je to izolovaná soustava.
9. Znát význam zákona zachování mechanické energie a jeho omezení a umět jej využívat při řešení úloh.
10. Znát vlastnosti křivky potenciální energie (její původ, body obratu, souvislost s rovnovážnými polohami).
11. Znát význam pojmu redukovaná hmotnost.
12. Umět užívat zákona zachování celkové energie v izolovaných soustavách v konkrétních úlohách.
13. Znát zobecněnou definici výkonu.

14. Znát význam rovnice $E = mc^2$ a vědět, co je to kvantování energie.

Pokyny

1. Prostudujte kapitolu 7 **Práce a kinetická energie**.
2. Prostudujte kapitolu 8 **Potenciální energie a zákon zachování energie**.
3. Prostudujte dodatky k tomuto tématu.

Kontroly

1. Poctivě projděte všechny kontroly v doporučených kapitolách a odpovězte na otázky za jednotlivými kapitolami.
2. Řešte úlohy: **k odst. 7.1** — 3C*, 4C*, 5C, 6U*, 7Ú, 8Ú*; **k odst. 7.3** — 9C, 12C, 15C, 17Ú; **k odst. 7.4** — 20C*, 21C, 23C, 26Ú; **k odst. 7.5** — 27C, 29Ú, 31Ú, 33Ú, 34Ú; **k odst. 7.6** — 35C, 38Ú, 40Ú; **k odst. 7.7** — 43C, 44C, 46Ú*, 47Ú, 49Ú, 51Ú; **k odst. 7.8** — 52C, 53C; **k odst. 8.3** — 3C, 5C, 6C, 7Ú, 10Ú, 11Ú; **k odst. 8.4** — 12C, 14C, 15C, 16C, 21Ú, 23Ú, 26Ú, 33Ú, 36Ú, 37Ú*, 38Ú, 39Ú, 40Ú, 41Ú, 44Ú*, 45Ú*; **k odst. 8.5** — 47Ú, 48Ú, 49Ú; **k odst. 8.6** — 51C, 55Ú; **k odst. 8.7** — 58C, 62C*, 63C, 64C*, 67C, 71Ú, 74Ú, 76Ú, 79Ú, 82Ú*, 85Ú; **k odst. 8.8** — 90C*, 91C*, 93Ú, 95Ú; **k odst. 8.9** — 97C.
3. Řešte úlohy pro počítač*.

Dodatky

4.1 K mechanické energii a jejím složkám

Uvedeme si formální odvození zákona zachování mechanické energie z druhého Newtonova zákona.[1] Předpokládejme, že na částici o konstantní hmotnosti m působí dva druhy sil – *konzervativní*, jejichž výslednici označíme $\boldsymbol{F^k}$ a *nekonzervativní*, jejichž výslednici označíme $\boldsymbol{F^n}$. Práce konzervativních sil po jakékoliv uzavřené křivce je nulová, tj. pro všechny uzavřené křivky Γ, po kterých se částice může pohybovat, platí

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{F^k} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \oint_\Gamma F^k \cos\varphi \,\mathrm{d}r = \oint_\Gamma \left(F^k_x \mathrm{d}x + F^k_y \mathrm{d}y + F^k_z \mathrm{d}z\right) = 0. \tag{4.1}$$

Můžeme si ovšem ověřit, že bude-li existovat skalární funkce polohového vektoru $E_p(\boldsymbol{r})$ taková, že její derivací podle jednotlivých kartézských souřadnic získáme příslušné souřadnice vektoru $\boldsymbol{F^k}$, bude vždy platit 4.1. Podívejme se na to proč.

[1] Pokud se vám bude zdát níže uvedené odvození poněkud náročné, zkuste si jej nejprve přepsat pro pohyb částice po přímce (jedna souřadnice).

Za předpokladu, že je

$$\boldsymbol{F^k} = F_x^k \boldsymbol{i} + F_y^k \boldsymbol{j} + F_z^k \boldsymbol{k} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\boldsymbol{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{4.2}$$

tj. je

$$\left(F_x^k; F_y^k; F_z^k\right) = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}; \frac{\partial E_p}{\partial y}; \frac{\partial E_p}{\partial z}\right),^2$$

tak z 4.1 máme pro práci výslednice konzervativních sil po libovolné křivce Γ

$$-\oint_\Gamma \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial E_p}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial E_p}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right) = -\oint_\Gamma \mathrm{d}E_p = 0.^3 \tag{4.3}$$

Dokázali jsme tedy, že jestliže platí 4.2, platí i pro všechny trajektorie Γ částice vztah 4.1. Lze ukázat i obráceně, je-li integrál síly po každé uzavřené trajektorii roven nule, je síla vyjádřitelná pomocí parciálních derivací typu 4.2 nějaké skalární funkce. V případě konzervativních sil takovou skalární funkci $E_p(\boldsymbol{r})$ nazýváme **potenciální energií**.

Zavedeme-li si pro uspořádanou trojici prostorových parciálních derivací označení $\boldsymbol{\nabla}$, můžeme pro konzervativní síly formálně psát

$$\boldsymbol{F^k} = -\boldsymbol{\nabla} E_p, \tag{4.4}$$

což pro nás zatím nebude nic jiného než zjednodušující formální přepis vztahu 4.2.[4] Diferenciální změnu potenciální energie tak nakonec definujeme vztahem

$$\mathrm{d}E_p \overset{\mathrm{def}}{=} -\boldsymbol{F^k} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{4.5}$$

Je nutné zdůraznit, že tato rovnice nedefinuje samotnou potenciální energii, ale pouze její *změnu*. O samotné *hodnotě* potenciální energie se ještě zmíníme.

Násobíme-li nyní druhý Newtonův zákon skalárně malým vektorem posunutí (diferenciálem) $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, získáme vztah

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\boldsymbol{\nabla} E_p \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{F^n} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}. \tag{4.6}$$

[2] K na první pohled nepřirozenému zavedení znaménka „$-$“ v definici veličiny E_p se ještě vrátíme.

[3] V jednorozměrném případě je určitý integrál z konstantní funkce rovné jedné je dán rozdílem krajních mezí, tj.

$$\int_{x_i}^{x_f} \mathrm{d}x = x_f - x_i,$$

proto je integrál z konstantní funkce po uzavřené křivce vždy roven nule.

[4] Ve skutečnosti je význam symbolu $\boldsymbol{\nabla}$, kterému říkáme **nabla**, hlubší než pouze jako označení uspořádané trojice prostorových derivací $\left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Lze totiž ukázat, že $\boldsymbol{\nabla}$ má vektorový charakter, tj. zapůsobíme-li jím na skalární funkci, získáme vektor a tedy vztahy zapsané pomocí $\boldsymbol{\nabla}$ platí ve všech soustavách souřadnic (nejen kartézských). Při studiu fyziky se s ním setkáváme velmi často a při popsaném působení $\boldsymbol{\nabla}$ na skalární funkci říkáme, že děláme její **gradient**. Více se o významu této operace dovíte v druhém semestru v přednášce o elektřině a magnetismu.

Uvažme nyní, že platí vztah

$$\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = 2\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}, \tag{4.7}$$

tj. můžeme psát

$$\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\mathrm{d}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(v^2). \tag{4.8}$$

Nachází-li se částice při svém pohybu po trajektorii Γ nejprve v místě určeném polohovým vektorem $\boldsymbol{r_1}$ s rychlostí $\boldsymbol{v_1}$ a hodnotou potenciální energie $E_p(\boldsymbol{r_1}) \equiv E_{p1}$ a poté dospěje do místa $\boldsymbol{r_2}$, přičemž její rychlost je nyní $\boldsymbol{v_2}$ a potenciální energie E_{p2}, získáme integrací vztahu 4.6 od $\boldsymbol{r_1}$ do $\boldsymbol{r_2}$ po nějaké křivce Γ

$$\begin{aligned} m\int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{i}}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{f}} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= m\int_{\boldsymbol{v}_\mathrm{i}}^{\boldsymbol{v}_\mathrm{f}} \boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}m\int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}}\mathrm{d}(v^2) = -\int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{i}}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{f}} \boldsymbol{\nabla}E_p\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{i}}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{f}} \boldsymbol{F^n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \\ &= -\int_{E_{p\mathrm{i}}}^{E_{p\mathrm{f}}}\mathrm{d}E_p + \int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{i}}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{f}} \boldsymbol{F^n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Definujeme-li nyní další veličinu $E_k(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} mv^2/2$, nazývanou **kinetická energie**, bude

$$m\int_{v_\mathrm{i}}^{v_\mathrm{f}}\mathrm{d}(v^2) = \frac{1}{2}mv_\mathrm{f}^2 - \frac{1}{2}mv_\mathrm{i}^2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} E_{k\mathrm{f}} - E_{k\mathrm{i}}. \tag{4.10}$$

Označme W^n práci nekonzervativních sil po úseku trajektorie Γ od $\boldsymbol{r_\mathrm{i}}$ do $\boldsymbol{r_\mathrm{f}}$, tj.

$$W^n = \int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{i}}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{f}} \boldsymbol{F^n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{4.11}$$

pak, protože pro veličinu E_p platí

$$-\int_{E_{p\mathrm{i}}}^{E_{p\mathrm{f}}}\mathrm{d}E_p = E_{p\mathrm{i}} - E_{p\mathrm{f}}, \tag{4.12}$$

dostáváme z 4.9 po přerovnání hledaný vztah

$$(E_{k\mathrm{f}} + E_{p\mathrm{f}}) - (E_{k\mathrm{i}} + E_{p\mathrm{i}}) = W^n. \tag{4.13}$$

Veličinu $E_m \stackrel{\mathrm{def}}{=} E_k + E_p$ nazýváme **(celková) mechanická energie** a výraz 4.13 můžeme přepsat na

$$E_{m\mathrm{f}} - E_{m\mathrm{i}} \equiv \Delta E_m = W^n. \tag{4.14}$$

Tento vztah nám říká, že změna mechanické energie částice pohybující se po křivce Γ je rovna práci vykonané výslednicí nekonzervativních sil (resp. součtu prací každé nekonzervativní síly zvlášť).

Nyní již konečně můžeme přistoupit k **zákonu zachování mechanické energie**. Nepůsobí-li na částici žádné nekonzervativní síly, je změna její mechanické energie nulová, což můžeme vyjádřit i tak, že součet kinetické a potenciální energie přiřazené částici v jednom okamžiku zůstává během celého jejího pohybu konstantní, tj.

$$E_k + E_p = E_{m0}. \tag{4.15}$$

Vraťme se ještě k definici potenciální energie. Jak již bylo uvedeno, definiční vztah 4.5 neurčuje potenciální energii jednoznačně, jenom její změnu. Svými přístroji jsme ovšem schopni zaregistrovat (měřit) pouze síly, a tedy jen změny potenciální energie. Ve výběru škály potenciální energie tak existuje jistá libovůle. Přímé zavádění hodnot potenciální energie (tedy nikoli jen jejích změn) se obvykle děje následujícím způsobem. Zvolíme si nějaké místo $\boldsymbol{r}_{\mathbf{f}}$ (často je to nekonečno, ale například v případě tíhových sil je obvyklejší volbou zemský povrch) a tomu definitoricky přiřadíme nulovou hodnotu potenciální energie, tj. $E_p(\boldsymbol{r}_{\mathbf{f}}) \equiv E_{p\mathrm{f}} = 0$. Protože, jak jsme již ukázali, platí

$$\int_{\boldsymbol{r}_{\mathbf{i}}}^{\boldsymbol{r}_{\mathbf{f}}} \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{k}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = E_{p\mathrm{i}} - E_{p\mathrm{f}} \tag{4.16}$$

je potenciální energie $E_{p\mathrm{i}} \equiv E_p(\boldsymbol{r}_{\mathbf{i}})$ v libovolném místě $\boldsymbol{r}_{\mathbf{i}}$ rovna práci, kterou vykonají konzervativní síly při přesunu částice z tohoto místa do místa $\boldsymbol{r}_{\mathbf{f}}$ nulového potenciálu. Za tohoto předpokladu můžeme definovat potenciální energii částice v místě $\boldsymbol{r}_1$, na níž působí konzervativní síly $\boldsymbol{F}^{\boldsymbol{k}}$ jako

$$E_p(\boldsymbol{r}_{\mathbf{i}}) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{\boldsymbol{r}_{\mathbf{i}}}^{\boldsymbol{r}_{\mathbf{f}}} \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{k}} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{4.17}$$

Důvod, proč se v definičním vztahu pro změnu potenciální energie 4.5 zavádí „−“ je zřejmě v tom, abychom mohli zapisovat mechanickou energii jako součet, nikoliv jako rozdíl kinetické a potenciální energie, tedy aby se nám v případě působení pouze konzervativních sil zachovávala veličina $E_k + E_p$ a nikoliv veličina $E_k - E_p$.[5] Výběr znaménka nemá vliv na fyzikální předpovědi průběhu přírodních dějů.

Výše jsme z Newtonovy pohybové rovnice formálně odvodili, že při mechanických pohybech soustavy, ve které nepůsobí nekonzervativní síly, se součet „nově“ definovaných veličin E_k a E_p zachovává. Přestože, jak je známo, se mechanická energie vždy nezachovává (tato možnost je zahrnuta v působení nekonzervativních sil), další vývoj fyzikálního poznávání ukázal, že ve všech dosud fyzikou zkoumaných procesech umíme najít veličinu, jejíž rozměr je stejný jako rozměr E_k a E_p a kterou když přičteme k již známým formám energie, bude se nám výsledek při vývoji fyzikálních soustav opět zachovávat. Zatímco tedy novodobá fyzika byla nucena pohybové rovnice přírodních objektů značně přehodnotit, zákon zachování energie tvoří stále její pevný pilíř.

Pokud jde o povahu této vpravdě zázračné veličiny, vlastně prakticky nevíme co to energie je. To čím jsme si zatím jisti je, že pokud se nám součet jejích známých druhů nezachovává, musíme najít buď jiný druh (což je méně časté) a nebo jsme něco přehlédli (což je častější :-)). Příkladem za všechny je tento příběh: experimentálně bylo zjištěno, že neutron je mimo atomové jádro nestabilní částicí a rozpadá se. Jenže ať se měřilo jak se měřilo, stále nebyl součet známých druhů energie spojených s neutronem před rozpadem roven součtu známých druhů energie spojených s produkty rozpadu. Vypadalo to, jako kdyby se energie někam při rozpadu ztrácela a tedy že zákon zachování energie v mikrosvětě

[5] Tato veličina má také svůj význam (a ne malý), setkáme se s ní ve vyšších partiích mechaniky v souvislosti s tzv. principem nejmenší akce a v kvantové mechanice formulované přes světočáry (prostoročasové trajektorie).

je porušen. Známý fyzik Wolfgang Pauli (vylučovací princip) přišel s tím, že by se celá koncepce energie dala zachránit, pokud by k již známým rozpadovým produktům neutronu existoval ještě jeden, který by chybějící energii (a hybnost) odnášel. Přitom by však tento produkt musel být natolik pronikavý, že by jej sebelepší detekční zařízení té doby nemohlo zaregistrovat. Tuto zprvu poněkud umělou ad hoc hypotézu se po více než dvaceti letech podařilo přímo experimentálně ověřit – byla dokázána existence nesmírně málo interagující (ale přesto velmi důležité) částice, která byla nazvána neutrino (italsky malý neutronek).

Kapitola 5

Soustava hmotných bodů, tuhé těleso a kontinuum

5.1 Těžiště a hybnost

Cíle

1. Znát definici a vlastnosti těžiště.
2. Znát definici hybnosti částice a hybnosti soustavy částic (klasicky i relativisticky) a umět zapsat 2. Newtonův zákon pomocí změny hybnosti.
3. Umět vysvětlit význam věty o hybnosti soustavy částic (první impulzové věty).
4. Znát formulaci zákona zachování hybnosti (+ podmínky jeho platnosti) a umět s ním zacházet při řešení úloh.
5. Umět popsat pohyb soustavy s proměnnou hmotností.
6. Umět popsat pohyb konaný v důsledku změn vnitřní energie soustavy zavedením vnějších hybných sil.

Pokyny

1. Prostudujte kapitolu 9 **Soustavy částic**.

Kontroly

1. Poctivě projděte všechny kontroly v doporučených kapitolách a odpovězte na otázky za jednotlivými kapitolami.

2. Řešte úlohy: **k odst. 9.2** — 1C*, 2C*, 3C, 5C, 6Ú, 8Ú, 11Ú*; **k odst. 9.3** — 15C, 16C*, 19Ú, 20Ú*, 21Ú, 22Ú; **k odst. 9.5** — 27C, 29Ú, 31Ú, 33Ú*; **k odst. 9.6** — 36C, 39Ú, 40Ú*, 41C, 44Ú, 45Ú, 47Ú; **k odst. 9.7** — 51C, 57Ú; **k odst. 9.8** —59C*, 63C, 66C*, 67C, 69C, 73Ú, 74Ú.

3. Řešte úlohy pro počítač*.

5.2 Srážky

Cíle

1. Znát vztah mezi změnou hybnosti a impulzem síly a umět jej aktivně používat při řešení úloh.

2. Umět obecně matematicky popsat pružnou přímou srážku a z výrazů takto získaných umět odvodit speciální případy.

3. Znát zákonitosti nepružných srážek a umět je využívat v konkrétních úlohách

4. Vědět jak se při srážkách pohybuje těžiště soustavy.

5. Umět výše získané dovednosti aplikovat na šikmé srážky.

Pokyny

1. Prostudujte kapitolu 10 **Srážky**.

2. Prostudujte dodatky k těmto tématům.

Kontroly

1. Poctivě projděte všechny kontroly v doporučených kapitolách a odpovězte na otázky za jednotlivými kapitolami.

2. Řešte úlohy: **k odst. 10.2** — 5C, 6C*, 7C, 10C*, 11C, 13Ú, 16Ú, 17Ú, 19Ú, 23Ú, 26Ú, 27Ú*; **k odst. 10.3** — 31C, 32C*, 35Ú, 37Ú, 39Ú; **k odst. 10.4** — 40C*, 41C, 44C, 47Ú, 49Ú, 51Ú, 57Ú; **k odst. 10.5** — 61C, 67Ú, 69Ú, 71Ú, 72Ú*; **k odst. 10.6** — 75C, 76Ú*, 77Ú.

3. Řešte úlohy pro počítač*.

5.3 Rotační pohyb

Cíle

1. Umět vysvětlit rozdíl mezi posuvným a otáčivým pohybem.
2. Umět definovat veličiny: úhlová dráha (poloha), otočení, úhlová rychlost a úhlové zrychlení.
3. Vědět proč konečně velké otočení nemůžeme popsat jako vektorovou veličinu.
4. Umět porovnat vztahy platné pro posuvný pohyb s konstantním zrychlením a pro otáčivý pohyb s konstantním úhlovým zrychlením.
5. Ovládat vztahy mezi obvodovými a úhlovými veličinami.
6. Znát vztah mezi tečným a normálovým zrychlením.
7. Umět zavést kinetickou energii tělesa při otáčivém pohybu.
8. Umět vypočítat momenty setrvačnosti nejjednodušších těles (prstenec, válec, tyč, deska) a umět užívat Steinerovu větu.
9. Znát vlastnosti momentu síly.
10. Umět vysvětlit význam věty o momentu hybnosti (2. impulzové věty).
11. Umět vyjádřit kinetickou energii, práci a výkon při otáčivém pohybu pomocí úhlových veličin.
12. Umět fyzikálně popsat valení těles po podložce.
13. Umět zavést moment hybnosti a umět odvodit a aplikovat větu o momentu hybnosti.
14. Umět odvodit zákon zachování momentu hybnosti a znát jeho důsledky.
15. Vědět co znamená, že je moment hybnosti kvantovaný.

Pokyny

1. Prostudujte kapitolu 11 Rotace.
2. Prostudujte kapitolu 12 Valení, moment síly a moment hybnosti.
3. Prostudujte Dodatky k těmto tématům.

Kontroly

1. Poctivě projděte všechny kontroly v doporučených kapitolách a odpovězte na otázky za jednotlivými kapitolami.

2. Řešte úlohy: **k odst. 11.2** — 1C, 3C*, 4C*, 5C, 7Ú, 10Ú; **k odst. 11.4** — 15C, 17C, 21Ú, 23Ú; **k odst. 11.5** — 25C, 31C, 34C, 35Ú, 38Ú*, 39Ú, 40Ú*, 43Ú, 44Ú*; **k odst. 11.6** — 46Ú; **k odst. 11.7** — 48C*, 51C, 52C*, 54Ú*, 55Ú, 57Ú, 58Ú*, 59Ú*; **k odst. 11.8** — 61C, 63Ú; **k odst. 11.9** — 67C, 70Ú*, 74Ú, 75Ú, 76Ú; **k odst. 11.10** — 77C, 79Ú, 81Ú*, 85Ú, 87Ú*, 89Ú; **k odst. 12.1** — 5C, 7C, 12Ú, 13Ú, 15Ú, 16Ú*; **k odst. 12.2** — 17C; **k odst. 12.3** — 19C*, 20C*, 23Ú; **k odst. 12.4** — 29C, 31C, 32Ú*, 33Ú, 35Ú*; **k odst. 12.5** — 36C, 37C, 41Ú; **k odst. 12.7** — 43C, 45C, 48Ú*, 49Ú*; **k odst. 12.8** — 50C*, 51C, 55C*, 57C, 59Ú, 61Ú, 65Ú, 68Ú*, 69Ú*; **k odst. 12.9** — 71C, 78C.

3. Řešte úlohy pro počítač* a projděte problémovou úlohu*.

5.4 Rovnováha těles a základy mechaniky kontinua

Cíle

1. Vědět za jakých okolností se těleso nachází v rovnováze, resp. statické rovnováze.
2. Vědět jaký je rozdíl mezi těžištěm a středem hmotnosti.
3. Vědět co jsou neúplně určené soustavy.
4. Umět popsat a vysvětlit křivku napětí-deformace.
5. Umět matematicky popsat lineární část vztahu napětí a deformace pro tah, tlak, smyk a všestranný tlak.

Pokyny

1. Prostudujte kapitolu 13 **Rovnováha a pružnost**.
2. Prostudujte Dodatky k těmto tématům.

Kontroly

1. Poctivě projděte všechny kontroly v doporučených kapitolách a odpovězte na otázky za jednotlivými kapitolami.

2. Řešte úlohy: **k odst. 13.4** — 1C, 2C*, 3C*, 5C, 6C, 9C, 13.C, 15C, 16C, 17C, 18C*, 19Ú, 21Ú, 24Ú*, 25Ú, 27Ú, 29Ú, 31Ú, 37Ú, 39Ú*, 41Ú, 43Ú, 45Ú*; **k odst. 13.6** — 49C, 51C, 52Ú*, 53Ú, 54Ú, 55Ú, 56Ú*.

Dodatky

5.4.1 Elementární úvod k popisu mechaniky kontinua

Účelem tohoto dodatku je zobecnění úvah ze sekce 13.6 ve **Fyzice** a první seznámení s tenzorovými veličinami. Výklad je veden převážně podle [2].

Úvod

Dnes již víme, že struktura hmoty je zrnitá (diskrétní), tj. žádnou látku nelze dělit na libovolně malé kousky tak, aby si zachovala své základní význačné vlastnosti. Nicméně se ukazuje, že v jistém okruhu problémů je výhodnější studovat látku bez ohledu na její atomární povahu. Často totiž pro makroskopický popis pohybu plynů, kapalin, či pro popis deformací pevných látek postačí uvažovat o látkách jako o spojitém prostředí, tzv. *kontinuu*. Při zkoumání vlastností kontinua jako modelu tělesa, látky či plynu předpokládáme, že jej můžeme rozdělit na soubor malých (infinitezimálních) objemů („částic"), které v daném okamžiku spojitě vyplňují oblast danou zkoumanou látkou. Rychlosti těchto „částic" se bod od bodu spojitě mění a nelze je ztotožnit s divoce vibrujícími či chaoticky se pohybujícími skutečnými atomy či molekulami zkoumané látky. Rychlost takovýchto fiktivních „částic" kontinua je dána střední rychlostí molekul v daném infinitezimálním objemu.

Obor fyziky zabývající se mechanickými vlastnostmi spojitých látkových prostředí se nazývá *mechanika kontinua*, přičemž ta se ještě dále dělí na *mechaniku tekutin* (kapaliny, plyny) a *reologii* (mechanika deformovatelných těles).

Deformace kontinua

Nyní se budeme snažit matematicky popsat změnu vzdálenosti „částic" kontinua při působení vnějších sil – tzv. *deformaci kontinua.*

Než postoupíme dál, musíme si nejprve zvyknout na nová označení, která jsou při popisu kontinua běžná a v mnohém výhodná. Předpokládejme, že máme zadánu vztažnou soustavu s kartézskými souřadnicemi – poloha každého bodu X v kontinuu je určena jeho polohovým vektorem $\boldsymbol{r}(x;y;z) \equiv \boldsymbol{r}(x_1;x_2;x_3)$ (viz obr.5.1). Polohu tohoto bodu po deformaci tradičně označujeme Y a jeho polohový vektor $\boldsymbol{r}'(y_1;y_2;y_3)$. Samozřejmě, že poloha bodu Y je závislá na volbě bodu X a na uplynulém čase, což pomocí vektorové symboliky zapisujeme jako

$$\boldsymbol{r'} = \boldsymbol{r'}(\boldsymbol{r}, t) \ , \tag{5.1}$$

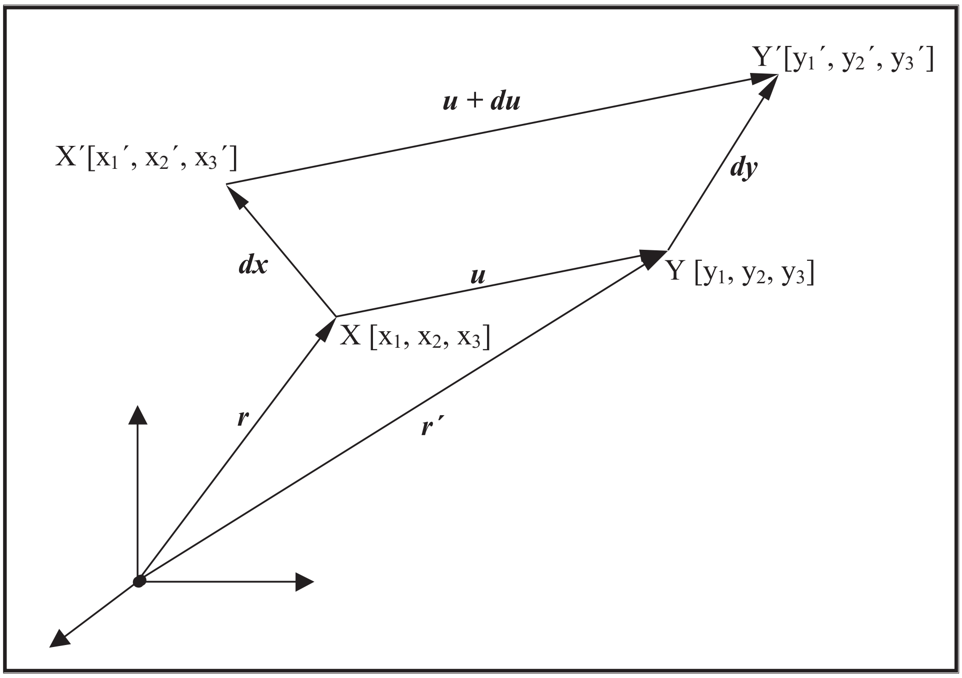
či po rozpisu do kartézských složek jako

$$y_1 = y_1(x_1, x_2, x_3, t), \quad y_2 = y_2(x_1, x_2, x_3, t), \quad y_3 = y_3(x_1, x_2, x_3, t) \tag{5.2}$$

Tyto tři rovnice se často zhušťují do zápisu

$$y_j = y_j(x_i, t) \tag{5.3}$$

kde index i, j, případně další užité indexy nezávisle probíhají hodnoty 1, 2 a 3.



Obrázek 5.1: K popisu deformace kontinua

Například skalární součin dvou vektorů $\boldsymbol{a}(a_1; a_2; a_3) \equiv a_j$ a $\boldsymbol{b}(b_1; b_2; b_3) \equiv b_k$ bude v tomto zápise vypadat takto:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \equiv \sum_k a_k b_k \tag{5.4}$$

Z uvedeného je snad zřejmé, že při zahájení pozorování v čase $t = 0$ bude $y_j(x_i, 0) = x_j$. Vektorem o souřadnicích y_j pak sledujeme polohu „částice" původně se nacházející v místě o souřadnicích x_j. Protože nás nebude nadále zajímat (obecně důležitá) závislost průběhu deformace na čase, budeme pro stručnost psát $y_j = y_j(x_i)$. Dále, protože bychom měli znát závislosti typu 5.3 pro všechny body kontinua, představují tyto rovnice vlastně nekonečný počet rovnic. Po matematické stránce to činí mechaniku kontinua jednou z nejobtížnějších částí fyziky.

Víme-li jak se mění poloha každé „částice" X kontinua s časem, můžeme deformaci kontinua vyšetřit pomocí popisu změn v jejím blízkém okolí. Okolí vybrané „částice" budeme mapovat pomocí vektoru $\mathbf{d}\boldsymbol{x} = (\mathrm{d}x_1; \mathrm{d}x_2; \mathrm{d}x_3) \equiv \mathrm{d}x_i$ (viz obr. 5.1) a zároveň budeme sledovat, jak se tento vektor změní při deformaci, tj. při přechodu X $\rightarrow$ Y. Z obrázku je patrné, že při deformaci se $\mathbf{d}\boldsymbol{x}$ změní na vektor, který jsme označili $\mathbf{d}\boldsymbol{y}$. Pro další postup si zaveďme tzv. *vektor posunutí*[1] , jehož počátek je v místě, kde se sledovaná „částice" nacházela na začátku uvažovaného děje a jeho konec je v místě konečné polohy „částice".

[1]Viz též obdobný vektor zavedený v kinematice hmotného bodu (částice).

Platí tedy:

$$u_i \overset{\text{def}}{=} y_i - x_i \tag{5.5}$$

a můžeme tak psát rovnici

$$y_j(x_i) \equiv x_j + u_j(x_i) \tag{5.6}$$

která při znalosti závislosti $u_j(x_i)$ jednoznačně určuje, kam každá „částice“ kontinua, původně se nacházející v místě x_i nakonec dostane.

Lze ukázat, že pohyb kontinua v okolí určitého bodu lze rozložit na pohyb posuvný (translační), pohyb otáčivý (rotační) a na pohyb deformační,[2] přitom deformační pohyb závisí pouze na změně vzdáleností „částic“ kontinua. Souřadnice libovolného místa X' v okolí bodu X budeme zapisovat jako $x_j + \mathrm{d}x_j$ a příslušný vektor posunutí jako $u_j + \mathrm{d}u_j$ (viz obr. 5.1). Změnu vektoru $\mathrm{d}x_j$ na vektor $\mathrm{d}y_j$ tak můžeme psát

$$\mathrm{d}y_j = \mathrm{d}x_j + \mathrm{d}u_j = \mathrm{d}x_j + \sum_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i \equiv \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_3 \tag{5.7}$$

Poslední rovností jsme se omezili pouze na popis velmi malého (diferenciálního) okolíčka bodu X. [3]

Vzdálenost bodů X a X', a tedy i velikost vektoru x_j, na počátku je rovna

$$|\mathrm{XX}'| = |\mathrm{d}x_j| = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2} = \sqrt{\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2} \equiv \sqrt{\sum_j \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_j}$$

Na konci deformace je vzdálenost těchto bodů Y a Y' rovna

$$|\mathrm{YY}'| = |\mathrm{d}y_j| = \sqrt{\sum_j \mathrm{d}y_j \mathrm{d}y_j}$$

Rozdíl $|\mathrm{d}y_j| - |\mathrm{d}x_j|$ velikosti vektorů tak popisuje deformace kontinua. Vzhledem ke snadnější manipulaci se však při zkoumání deformací dává přednost výrazu

$$\left(\sum_j \mathrm{d}y_j \mathrm{d}y_j\right) - \left(\sum_j \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_j\right) \tag{5.8}$$

[2]Toto tvrzení je obsahem tzv. *Helmholtzovy věty* .

[3]To znamená, že dosud jsme předpokládali, že malý, ale konečně velký vektor $\Delta x_j \equiv x_j' - x_j$ se obecně deformuje na nějaký konečně velký vektor $\Delta y_j \equiv y_j' - y_j = (x_j' + u_j(x_i + \Delta x_i)) - (x_j + u_j(x_i))$, tedy celkem bude $\Delta y_j = \Delta x_j + (u_j(x_i + \Delta x_i) - u_j(x_i))$. Pro dosud přesné rovnosti však můžeme zavést lineární přiblížení dané rozvinutím závislosti $u_j(x_i + \Delta x_i)$ do Taylorovy řady ukončené lineárním členem. Získáme tak vztah:

$$u_j(x_i + \Delta x_i) - u_j(x_i) \approx \sum_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i$$

Velikost okolí bodu X, pro níž je aproximace lineárního přiblížení ještě únosná samozřejmě závisí na samotné deformaci.

Na tomto místě bude vhodné zavést tzv. *(Einsteinovu) sumační konvenci*, která říká, že vyskytne-li se ve výrazu index dvakrát, rozumí se automaticky, že je přes něj sčítáno aniž by byl explicitně vypsán znak sumace $\sum$. Tato konvence velmi zpřehledňuje a zjednodušuje zápisy v mnoha odvětvích fyziky. Například výše uvedený výraz 5.8 lze pomocí této konvence přepsat na

$$\mathrm{d}y_j\mathrm{d}y_j - \mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_j$$

Dalším příkladem může být, při zadání „dvouindexové veličiny"

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$

její součin s „jednoindexovou veličinou" $v_i = (v_1; v_2; v_3)$. Zápisem $T_{ij}v_j$ máme na mysli součet $T_{i1}v_1 + T_{i2}v_2 + T_{i3}v_3$, naproti tomu zápisem $T_{ij}v_i$ součet $T_{1j}v_1 + T_{2j}v_2 + T_{3j}v_3$. Konkrétním příkladem takové „dvouindexové veličiny" může být již uvedený výraz:

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Výraz $(\partial u_j/\partial x_i)\mathrm{d}x_i$ pak bude znamenat

$$\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_1}\right)\mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}x_2 + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_3}\right)\mathrm{d}x_3$$

Zaveďme si ještě jeden důležitý pojem, tzv. *Kroneckerův symbol (delta)* δ_{jk} (též Kroneckerovo delta) definovaný takto:

$$\delta_{jk} = 0 \quad \text{pro} \quad j \neq k \quad \text{a} \quad \delta_{jk} = 1 \quad \text{pro} \quad j = k \tag{5.9}$$

Je zřejmé, že Kroneckerovo delta může být reprezentováno jednotkovou maticí

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Takže například $\delta_{jk}\mathrm{d}x_j\mathrm{d}x_k$ bude (s využitím sumační konvence) rovno

$$\delta_{11}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_1 + \delta_{12}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + \delta_{13}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3 + \delta_{21}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 + \delta_{22}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_2 + \delta_{23}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + \delta_{31}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 +$$
$$+ \ \delta_{32}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2 + \delta_{33}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_3 = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_1 + \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_2 + \mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_3$$

Obecně pro složky jakéhokoli vektoru v_i pak můžeme celkem psát $\delta_{jk}v_jv_k = v_lv_l$.[4] Tato rovnost se používá často i z druhé strany. Intenzivně je využívána také rovnost (dokažte si sami)

$$\delta_{kl}v_l = v_k \tag{5.10}$$

[4]Komu dělá problémy střídání označení indexů připomínám, že na označení indexu, přes který se sčítá vůbec nezáleží (jenom nesmí kolidovat s již zavedeným označením indexu, přes který sčítáno není).

Při sčítání přes jeden index Kroneckerova delta, je v celém výrazu sčítací index nahrazen druhým indexem Kroneckerova delta, tj. například pro $A_{kj}v_k u_l \delta_{mk}$ je výsledek po sečtení přes index k roven $A_{mj}v_m u_l$ (opět rozepsáním součtu můžete ověřit).

Z matematiky pro fyziky byste již měli vědět, že devítice (matice) členů $\partial u_j/\partial x_i$ jsou kartézské souřadnice (složky) tzv. *tenzoru*,[5] podobně jako $(\mathrm{d}x_1; \mathrm{d}x_2; \mathrm{d}x_3)$ jsou kartézské souřadnice vektoru $\mathrm{d}x_i \equiv \mathbf{d}\boldsymbol{x}$. Na tomto místě pouze upozorněme, že stejně jako ne každá uspořádaná trojice tvoří *vektor*, tak také ne každá uspořádaná devítice tvoří *tenzor*. Obecná veličina, jejíž kartézské vyjádření můžeme zapsat do trojice uspořádaných složek, se od vektorové veličiny může odlišovat v tom, jak se tyto složky chovají při přechodu od jedné soustavy souřadnic k jiné – to znamená, jak se chovají při tzv. *transformaci souřadnic*). Podobně i u tenzorů, tenzorová veličina se od obecné uspořádané devítice může lišit v chování při transformacích souřadnic.[6]

Vraťme se opět k výrazu 5.8. S omezením se na lineární deformace můžeme, při znalosti funkce $u_j(x_i)$ pro všechny body kontinua, tento rozdíl najít takto:

Vyšetřeme nejprve výraz

$$\sum \mathrm{d}y_j \mathrm{d}y_j \equiv \mathrm{d}y_j \mathrm{d}y_j = (\mathrm{d}x_j + \mathrm{d}u_j)(\mathrm{d}x_j + \mathrm{d}u_j) = \left[\mathrm{d}x_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\right]\left[\mathrm{d}x_j + \frac{\partial u_j}{\partial x_l}\mathrm{d}x_l\right] \quad (5.11)$$

který s pomocí vztahu 5.10 můžeme přepsat na

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}y_j \mathrm{d}y_j &= \left(\delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\mathrm{d}x_k \left(\delta_{jl} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right)\mathrm{d}x_l = \\
&= \left[\delta_{jk}\delta_{jl} + \delta_{jk}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\delta_{jl} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right)\right]\mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_l = \\
&= \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_j + \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right)\right]\mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_l
\end{aligned}$$

Nakonec tedy můžeme pro změnu vzdálenosti zkoumaného bodu X a bodu X' z jeho okolí před a po deformaci psát

$$\mathrm{d}y_j \mathrm{d}y_j - \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_j = \left[\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right)\right]\mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_l \quad (5.12)$$

[5] Přesněji tenzoru druhého řádu.

[6] Existují i veličiny „trojindexové“, které tvoří uspořádané dvacetisedmice, veličiny „čtyřindexové“, které tvoří uspořádané jedenaosmdesátnice atd. Pokud se tyto veličiny při přechodech mezi různými soustavami souřadnic „správně“ chovají, říkáme jim po řadě tenzory třetího řádu, tenzory čtvrtého řádu atd. Z tohoto hlediska jsou vektory tenzory prvního řádu a skaláry tenzory nultého řádu. Důležitost zavedení tenzorů tkví v tom, že fyzikální zákony formulované pomocí veličin tenzorového charakteru můžeme vyjadřovat nezávisle na zvolené soustavě souřadnic. Například Newtonovy pohybové rovnice zapsány ve tvaru $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$ platí nezávisle na tom, jestli souřadnice příslušných vektorů nakonec budeme vyjadřovat v jedné kartézské soustavě souřadnic nebo v pootočené kartézské soustavě souřadnic (ve skutečnosti fyzikální obsah samozřejmě nezávisí ani na tom, zda ji vyjádříme v cylindrických, sférických či jiných (statických) souřadnicových soustavách.

Zavedeme-li „dvouindexovou veličinu“, o níž lze ukázat, že má tenzorový charakter, vztahem

$$\varepsilon_{kl}(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_l}\right)\right]^{7} \tag{5.13}$$

Tuto veličinu nazýváme *tenzorem velké deformace*. Deformaci tak můžeme charakterizovat výrazem

$$\mathrm{d}y_j \mathrm{d}y_j - \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_j = 2\varepsilon_{kl} \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_l{}^{8} \tag{5.14}$$

který říká, že ze znalosti tenzoru velké deformace (6 čísel) v každém bodě X kontinua, umíme pro libovolně vybraný malý vektor $\mathrm{d}x_i$ vedený z tohoto bodu do nějakého blízkého bodu X' určit, jak se tyto body po deformaci oddálí či přiblíží.

Dosud jsme byli omezeni pouze volbou dostatečně malého vektoru $\mathrm{d}x_i$ mapujícího okolí bodu X. Při vhodné volbě $\mathrm{d}x_i$ je možno pomocí znalosti vektoru posunutí $u_j(x_i)$ a vztahů 5.14 a 5.13 postihnout libovolně velkou deformaci. Zajímavé výsledky lze ovšem získat i tehdy, omezíme-li se na studium tzv. *malých deformací* nebo také *lineárních deformací*. Budou-li malé deformace, budou malé i změny vektoru posunutí, tj. výrazy typu $(\partial u_j / \partial u_k)$ budou pro každý bod kontinua malá čísla. Za těchto okolností můžeme ve výrazu v hranatých závorkách vztahu 5.12 zanedbat poslední člen, vůči oběma předchozím. To nás přivádí k definici tzv. *tenzoru malých deformací*:

$$e_{kl} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \tag{5.15}$$

a následně k popisu deformace v tomto přiblížení, tj.

$$\mathrm{d}y_j \mathrm{d}y_j - \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_j = 2e_{kl} \mathrm{d}x_k \mathrm{d}x_l \tag{5.16}$$

Podívejme se nyní ve stručnosti, jaký význam mají složky takto nadefinovaného tenzoru. Nejprve rozepišme rovnici 5.16:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}y_1^2 + \mathrm{d}y_2^2 + \mathrm{d}y_3^2) \quad &- \quad (\mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2) = \\
&= \quad 2e_{11}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_1 + 2e_{12}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + 2e_{13}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_3 + \\
&+ \quad 2e_{21}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_1 + 2e_{22}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_2 + 2e_{23}\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 + \\
&+ \quad 2e_{31}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_1 + 2e_{32}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_2 + 2e_{33}\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_3
\end{aligned}$$

Budeme-li se zajímat o deformaci podél jedné ze souřadnicových os, zvolíme mapovací vektor v jejím směru. Vyberme pro určitost například osu $y \equiv x_2$ a zvolme $\mathrm{d}x_j = (0; \mathrm{d}x_2; 0)$. Změna čtverce jeho délky pak vychází jednoduše:

$$(\mathrm{d}y_1^2 + \mathrm{d}y_2^2 + \mathrm{d}y_3^2) - \mathrm{d}x_2^2 = 2e_{22}\mathrm{d}x_2^2 \tag{5.17}$$

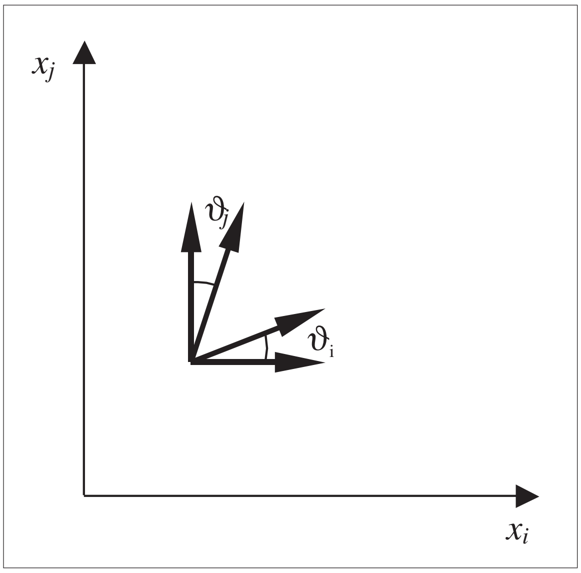
[7] Všimněte si, že tato veličina je symetrická vůči záměně obou indexů, tj. nezávislých je pouze jejích šest složek ($\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}, \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$ a $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$) a nezapomeňte, že přes zdvojený index se sčítá.

[8] Na první pohled nadbytečné zavedení čísla 2 do definice tenzoru velké deformace, bude vysvětleno později.

Označíme-li velikost vektoru $\mathrm{d}x_j$ na začátku deformace stejným výrazem jako ve **Fyzice** na straně 343, tj. d a velikost vektoru $\mathrm{d}y_j$ na konci deformace výrazem $d+\Delta d$ (prodloužení o Δd), dostáváme vyjádření diagonální složky tenzoru malé deformace (s uvážením, že pro malé deformace je $\Delta d \ll d$):

$$e_{22} = \frac{(d+\Delta d)^2 - d^2}{2d^2} = \frac{(d+\Delta d - d)(d+\Delta d + d)}{2d^2} \approx \frac{\Delta d\, 2d}{2d^2} = \frac{\Delta d}{d} \tag{5.18}$$

Z uvedeného je patrné, že diagonální složky tenzoru malých deformací mají (v tomto přiblížení) význam relativní změny délky elementu původně rovnoběžného s jednotlivými souřadnicovými osami. Vyšetření významu nediagonálních složek tenzoru malých deformací je poněkud obtížnější a nebudeme ho zde dělat. Nicméně lze ukázat, že budeme-li sledovat dva mapující vektůrky $\mathrm{d}x_i$ a $\mathrm{d}x_j$ z okolí bodu X a mířící ve směru os x_i a x_j (viz obr. 5.2), budou se oba obecně vůči původním směrům stáčet. Označíme-li úhly otočení po řadě ϑ_i a ϑ_j, bude ve stejném přiblížení pro $i \neq j$ složka e_{ij} rovna polovině součtu obou úhlů, tj. $e_{ij} = \frac{1}{2}(\vartheta_i + \vartheta_j)$.



Obrázek 5.2: K nediagonálním elementům tenzoru deformace.

Napětí jako tenzor

V tomto paragrafu se budeme snažit obecněji popsat síly působící na pevné kontinuum (výsledky lze uplatnit i při studiu tekutých prostředí). Síly působící na tělesa dělíme z hlediska působiště na dvě skupiny:

1. Síly prostupující celým tělesem (např. tíhová síla nebo setrvačné síly). Tyto síly jsou úměrné velikosti objemu tělesa na nějž působí, nazýváme je tedy *síly objemové* a

definujeme je vztahem

$$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}) = \lim_{V\to 0} \frac{\boldsymbol{F}(V)}{V}$$

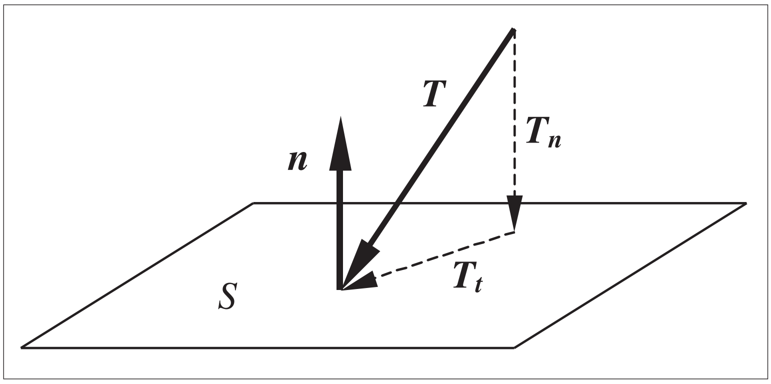
kde síla $\boldsymbol{F}(V)$ působí na stále se zmenšující objem V, obklopující bod o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}$. Nejobvyklejší objemová síla souvisí se silou tíhovou $\boldsymbol{F_g} = V\rho\boldsymbol{g}$ a lze ji vyjádřit vztahem $\boldsymbol{G_T}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{g}$

2. Působí-li vnější síly pouze na povrch tělesa (například vztlakové (archimedovské) síly v tekutinách), přenášejí se silová působení i dovnitř tělesa prostřednictvím mezimolekulárních sil. Tato působení lze pak zjistit i na libovolné myšlené ploše uvnitř tělesa. Těmto silám říkáme *síly plošné*. Plošné síly charakterizujeme tzv. *vektorem napětí* definovaným vztahem

$$\boldsymbol{\sigma}^{(\boldsymbol{n})} = \lim_{S_n\to 0} \frac{\boldsymbol{F}}{S_n}$$

ve kterém S_n je stále se zmenšující rovinná ploška s normálovým vektorem $\boldsymbol{n}$ a index $(\boldsymbol{n})$ signalizuje příslušnost vektoru napětí k této plošce[9] – napětí sice nezávisí na obsahu plochy (síla na jednotkovou plochu), ale na její orientaci ano!

Je-li těleso (kontinuum) v rovnováze je silové působení $\boldsymbol{T}$ z jedné strany plošky vyrovnáváno působením $-\boldsymbol{T}$ z druhé strany plošky (tomu pak přísluší vektor napětí $-\boldsymbol{\sigma}^{(\boldsymbol{n})}$). Vektor napětí můžeme rozložit (viz obr. 5.3) na normálovou složku (normálové napětí) a tečnou složku (tečné napětí). Je-li tečná složka napětí nulová, říká se tomuto napětí *čistý tah* ($\boldsymbol{\sigma}^{(\boldsymbol{n})} \uparrow\uparrow \boldsymbol{n}$) nebo *čistý tlak* ($\boldsymbol{\sigma}^{(\boldsymbol{n})} \uparrow\downarrow \boldsymbol{n}$), je-li naopak nulová pouze normálová složka, hovoříme o *čistém smyku* ($\boldsymbol{\sigma}^{(\boldsymbol{n})} \perp \boldsymbol{n}$).



Obrázek 5.3: Normálová a tečná složka napětí.

Jak již bylo uvedeno, uvnitř kontinua můžeme volit plošky, na nichž napětí zkoumáme, libovolně. Potřebovali bychom tedy takový popis napětí v daném místě kontinua, který

[9]Limitní proces není nutný v případě, že síla působí na rovinnou plochu o obsahu S **rovnoměrně**, pak je prostě $\boldsymbol{\sigma}^{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{F}/S_n$. V opačném případě musíme plochu zmenšovat dokud tento předpoklad nebude splněn.

by určoval napětí na všech myslitelných (infinitezimálních) ploškách, procházejících zkoumaným místem. Ukazuje se, že takovýto úplný popis je určen zadáním tří vektorů napětí $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}, \boldsymbol{\sigma}^{(2)}, \boldsymbol{\sigma}^{(3)}$ působících v daném místě na plošky kolmé k jednotlivým souřadnicovým osám x_1, x_2, x_3. Složky těchto vektorů

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{(1)} &= (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)} &= (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(3)} &= (\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33})\end{aligned} \tag{5.19}$$

tvoří symetrický tenzor (druhého řádu)

$$\sigma_{ik} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Tento tenzor nazýváme *tenzorem napětí*. Ze znalosti tenzoru napětí pak můžeme vypočítat složky vektoru napětí $\boldsymbol{\sigma}^{(n)} = (\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3})$ působícího na libovolnou plošku kolmou na jednotkový (normálový) vektor $\boldsymbol{n}^\circ = (n_1^\circ, n_2^\circ, n_3^\circ)$ pomocí vztahů[10]

$$\begin{aligned}\sigma_{n1} &= \sigma_{1k} n_k^\circ \\ \sigma_{n2} &= \sigma_{2k} n_k^\circ \\ \sigma_{n3} &= \sigma_{3k} n_k^\circ\end{aligned}$$

Ze způsobu zavedení složek tenzoru σ_{ij} je zřejmé, že složky se stejnými indexy značí čistě tahové ($\sigma_{kk} > 0$) nebo čistě tlakové ($\sigma_{kk} < 0$) složky vektorů napětí $\boldsymbol{\sigma}^{(k)}$ a složky smíšené tvoří projekce tečných složek vektorů napětí do jednotlivých souřadnicových os.

Vybereme-li z kontinua, na nějž působí výslednice objemových sil $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, t)$, libovolný (malý) kvádřík, pak z úvahy o jeho dynamice lze sestavit *pohybovou rovnici kontinua* ve (složkovém) tvaru (podrobně si rozepište):

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} + G_k = \rho \frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}t^2} \tag{5.20}$$

kde $u_i \equiv y_i - x_i$ je posunutí (viz. 5.6. Je-li kontinuum v rovnováze, redukuje se uvedená rovnice na

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} + G_k = 0 \tag{5.21}$$

Tato rovnice[11] je nazývána *rovnicí rovnováhy kontinua*.

[10] Všimněte si, že jde vlastně o skalární součiny $\boldsymbol{\sigma}^{(i)} \cdot \boldsymbol{n}^\circ$.

[11] Přesněji se jedná o tři rovnice, z nichž k-tá vypadá rozepsána

$$\frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{2k}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{3k}}{\partial x_3} + G_k = 0$$

Co z toho?

V předchozím jsme se naučili popisovat deformace pomocí vektoru posunutí u_i a z něj odvozených tenzorů malých e_{ij} a velkých ε_{ij} deformací. Také jsme se naučili popisovat síly působící v kontinuu, konkrétně jsme zavedli objemovou sílu G_i a tenzor napětí σ_{ij}. Základní úlohou teorie pružnosti je najít napětí a deformaci v každém bodě tělesa-kontinua, známe-li rozložení objemových sil a napětí nebo deformaci na povrchu tělesa (tzv. *okrajové podmínky*). Přitom předpokládáme, že těleso je po deformaci v rovnováze.

Z matematického hlediska hledáme devět funkcí $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3)$ (tři, pro každou složku jedna) a $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2, x_3)$ (šest, tenzor je symetrický) při zadaných okrajových podmínkách. Vztah u_i a σ_{ij} je však zatím určen pouze třemi obecnými rovnicemi 5.21 rovnováhy kontinua. K jednoznačnému určení hledaných funkcí tak chybí šest rovnic. Tyto rovnice v sobě samozřejmě musí zahrnovat i informaci o zkoumané látce (rovnice rovnováhy kontinua platí pro každé kontinuum).

V obecném případě potřebujeme šest nezávislých vztahů pro šest nezávislých složek σ_{ij} a e_{ij}. Takovéto vztahy však musíme najít buď z „hlubší“ teorie (např. z kvantové teorie) nebo získat měřením. Provázanost složek σ_{ij} a e_{ij} může být i značně složitá, ale měření ukazují, že mnoho látek splňuje v prvním přiblížení jednoduchou, lineární závislost σ_{ij} na e_{ij}[12]

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \tag{5.22}$$

Tento vztah je zobecněním přímé úměrnosti mezi napětím a deformací, se kterou jste se setkali ve **Fyzice** na str. 343 a říká se mu *(zobecněný) Hookeův zákon* (rozepište si například rovnici pro σ_{12}, má devět sčítanců). Lze ukázat, že 81 čísel C_{ijkl} tvoří složky tenzoru čtvrtého řádu, říkáme jim *elastické koeficienty.* Tyto konstanty určují materiálovou charakteristiku obecně anizotropní látky splňující Hookeův zákon. Ukazuje se, že počet nezávislých složek tenzoru C_{ijkl} závisí na stupni anizotropie (symetrii) dané látky. To znamená, že čím je látka symetričtější („více izotropní“), tím je počet nezávislých elastických koeficientů nižší. Například, pro nejméně symetrické krystaly (trojklonná soustava) jich je 21, kdežto pro pro popis úplně izotropní látky stačí pouze dva koeficienty.

Pro zajímavost uvedeme zápis zobecněného Hookeova zákona pro izotropní těleso pomocí dvou materiálových konstant *modulu pružnosti v tahu E* a *modulu pružnosti ve smyku G* zavedených ve **Fyzice** na straně 344

$$\sigma_{ij} = G\frac{E-2G}{3G-E}(e_{11}+e_{22}+e_{33})\delta_{ij} + 2Ge_{ij} \tag{5.23}$$

Modul objemové roztažnosti K, zavedený na té samé straně již tedy nemůže být nezávislou materiálovou konstantou. Skutečně lze ukázat, že platí

$$K = \frac{EG}{3(E+G)} \tag{5.24}$$

[12]Samozřejmě, že existuje daleko více látek, které tuto závislost nesplňují ani přibližně. Zde bude zmíněn pouze nejjednodušší model.

Rovnice 5.21 a 5.23 spolu s okrajovými podmínkami dohromady jednoznačně určují tenzor napětí σ_{ij} a vektor posunutí u_i[13] v každém bodě kontinua. Znalosti těchto veličin jsou velmi důležité například ve stavebnictví, při konstrukci velkých průmyslových strojů či v letectví. Hookeův zákon je nejjednodušším možným vztahem mezi napětím a deformací. Podrobněji se nejen s Hookeovým, ale i s jinými modely chování látek za působení různých sil seznámíte ve speciálních partiích fyziky nebo ve speciální literatuře.

[13]Připomínáme, že mezi tenzorem deformace a vektorem posunutí platí vztah 5.15.

Kapitola 6

Základy speciální teorie relativity

Cíle

1. Vědět čím se zabývá speciální teorie relativity a umět vysvětlit postuláty, ze kterých vychází.
2. Umět zavést prostoročasové souřadnice (mříž z tuhých měřících tyčí a synchronizace).
3. Umět vysvětlit problematiku relativity současnosti.
4. Umět odvodit vztah pro dilataci časového intervalu měřeného „klidným“ pozorovatelem na pohybujících se hodinách.
5. Umět odvodit vztah pro kontrakci délky pohybující se tuhé tyče měřené „klidným“ pozorovatelem.
6. Znát fyzikální obsah Lorentzových transformačních rovnic.
7. Umět z Lorentzových transformací odvodit vztahy pro relativitu současnosti, dilataci času, kontrakci délek a relativistické skládání rychlostí.
8. Vědět co mají společného a jaký je rozdíl v Dopplerově jevu uplatňujícímu se u zvukových a u světelných vln.
9. Umět zavést relativistickou hybnost a kinetickou energii.
10. Umět formulovat zákon zachování relativistické energie soustavy.
11. Vědět jak v relativistické fyzice souvisí hybnost a kinetická energie a jak hybnost a celková energie částice.

Pokyny

1. Prostudujte kapitolu 38 **Relativita**.

2. Prostudujte dodatky k tomuto tématu.

Kontroly

1. Poctivě projděte všechny kontroly v doporučených kapitolách a odpovězte na otázky za jednotlivými kapitolami.

2. Řešte úlohy: **k odst. 38.2** — 1C*, 2C*, 3Ú; **k odst. 38.5** — 5C, 7Ú, 8Ú*; **k odst. 38.6** — 11C, 13C*, 15Ú, 16Ú, 17Ú*; **k odst. 38.8** — 19C, 21C, 22C*, 23Ú, 25Ú; **k odst. 38.9** — 27C, 29C, 31Ú, 33Ú, 34Ú; **k odst. 38.10** — 35C, 36C*, 37C, 39Ú; **k odst. 38.12** — 41C, 43C, 46C*, 47C*, 48Ú, 50Ú, 51Ú, 54Ú, 55Ú*, 57Ú, 59Ú.

3. Řešte úlohy pro počítač* a obě problémové úlohy*.

Kapitola 7

Gravitační a tíhové pole

Cíle

1. Umět vysvětlit a ve vektorovém tvaru zapsat Newtonův gravitační zákon.
2. Umět vysvětlit, proč i v blízkosti povrchu Země můžeme její gravitační působení nahradit gravitačním působením částice o stejné hmotnosti a nacházející se v jejím středu.
3. Umět vysvětlit princip superpozice (důležité).
4. Vědět proč rozlišujeme mezi tíhovým a gravitačním zrychlením.
5. Umět vysvětlit gravitační chování homogenní kulové slupky.
6. Znát vztah gravitační potenciální energie a gravitační síly.
7. Umět určit potenciální energii gravitačně vázaného systému.
8. Umět vysvětlit pojem úniková rychlost.
9. Umět podrobně objasnit obsah a význam všech tří Keplerových zákonů.
10. Znát pojmy: perihélium, afélium, perigeum a apogeum.
11. Umět vysvětlit vztahy mezi potenciální, kinetickou a celkovou mechanickou energií družic těžkých těles.

Pokyny

1. Prostudujte kapitolu 14 **Gravitace**.
2. Prostudujte dodatky k tomuto tématu.

Kontroly

1. Poctivě projděte všechny kontroly v doporučených kapitolách a odpovězte na otázky za jednotlivými kapitolami.

2. Řešte úlohy: **k odst. 14.2** — 2C*, 5Ú; **k odst. 14.3** — 7C, 8Ú, 11Ú, 14Ú*, 15Ú*; **k odst. 14.4** — 19C, 20C*, 21C*, 22Ú*, 23Ú, 24Ú*, 25Ú, 27Ú; **k odst. 14.5** — 29C, 31Ú, 33Ú*; **k odst. 14.6** — 34C, 35C, 36C, 37C*, 38C*, 40C*, 42C*, 43Ú, 46Ú, 47Ú*, 49Ú, 51Ú, 52Ú*, 53Ú*; **k odst. 14.7** — 55C, 57C*, 61C, 63C, 64C, 67Ú, 68Ú*, 69Ú, 71Ú, 72Ú*, 73Ú*, 74Ú*; **k odst. 14.8** — 76C*, 77Ú, 78Ú, 79Ú, 81Ú, 82Ú, 85Ú; **k odst. 14.9** — 86C, 87Ú, 88Ú*.

3. Řešte úlohy pro počítač*.

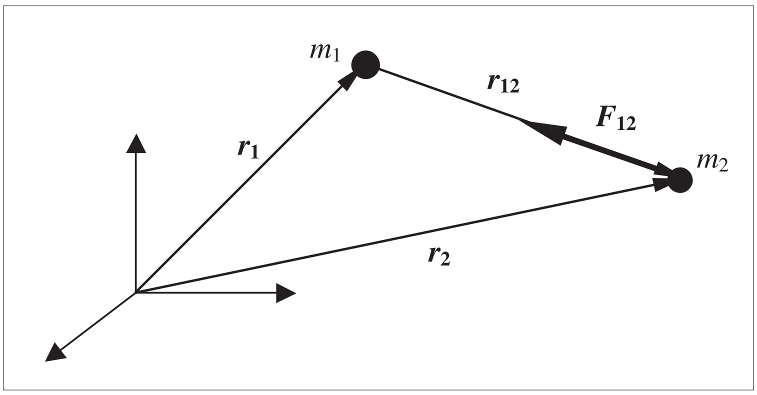
Dodatky

7.1 Newtonův gravitační zákon

Zákon univerzální gravitace – každá částice hmoty ve vesmíru je přitahována jinou částicí silou jež je přímo úměrná součinu jejich hmotností $m_1 m_2$ a nepřímo úměrná druhé mocnině jejich vzdálenosti r^2. Vektorový zápis tohoto zákona (viz obr. 7.1)

$$\boldsymbol{F_{12}} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\frac{\boldsymbol{r_{12}}}{r_{12}} \equiv -G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\boldsymbol{r}^{\circ}_{\boldsymbol{12}} \tag{7.1}$$

vyjadřuje gravitační silové působení částice o hmotnosti m_1 na částici o hmotnosti m_2. Konstanta úměrnosti $G \doteq 6,67 \cdot 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} je podle současných poznatků stejná ve všech místech ve Vesmíru.



Obrázek 7.1: K Newtonovu gravitačnímu zákonu.

Pomocí tohoto vektorového tvaru, lze snadno odvodit i druhý Keplerův zákon. Předpokládáme-li, že počátek souřadnicové soustavy umístíme do částice o hmotnosti M, můžeme pro gravitační sílu, jíž působí na částici o hmotnosti m nacházející se ve vzdálenosti r psát

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{r}^\circ \tag{7.2}$$

Nyní zkoumejme časovou změnu momentu hybnosti $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}^1 \tag{7.3}$$

Užijeme-li druhého Newtonova zákona a dosadíme-li 7.2, máme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = G\frac{Mm}{r^2}\boldsymbol{r}^\circ \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0} \tag{7.4}$$

Protože se (vektor) momentu hybnosti zachovává, bude se zachovávat i plošná rychlost viz 2.33, protože platí

$$\boldsymbol{w} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{L}}{2m} = \text{konst} \tag{7.5}$$

Plocha opsaná polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$ částice m za sekundu je tedy stále táž.

7.2 Gravitační pole a jeho popis

Jaký mechanismus se skrývá za tím, že se každá dvě tělesa, a to i na značné vzdálenosti, přitahují gravitační silou? Tato síla přitom podle Newtonova zákona závisí **pouze** na hmotnostech obou těles a na jejich vzájemné vzdálenosti.[2] Z toho by ale vyplývalo, že pohne-li se jedno těleso, druhé těleso okamžitě, třeba i přes celý vesmír, pocítí změnu gravitačního působení prvního tělesa. Takto by se ovšem dalo komunikovat (přenášet informace) nekonečnou rychlostí, a to odporuje závěrům speciální teorie relativity. Tento rozpor (a mnohé další) vyřešil Albert Einstein v roce 1915 svou tzv. *obecnou teorií relativity*, která nahradila do té doby přes 200 let bezchybně vládnoucí Newtonovu teorii gravitace. Newtonovo působení na dálku bylo tak nahrazeno deformacemi prostoročasu,[3] šířícími se konečnou rychlostí.

Tyto deformace se jeví jako jakési pole, které je rozprostřeno kolem každého hmotného tělesa a svým působením ovlivňuje pohyb těles v jeho okolí. V případě gravitace toto pole nazýváme *gravitační*. Ukazuje se, že všechny základní druhy sil – gravitační, elektromagnetické i oba druhy jaderných sil – jsou přenášeny příslušnými poli (konečnou rychlostí). Pole má některé vlastnosti, které přisuzujeme „normální“ látce – zejména přenáší energii

[1] Zkuste sami přijít na to, proč je $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

[2] Konstanta úměrnosti není materiálová charakteristika, jako je tomu například u elektrických sil, její velikost je dána volbou jednotek.

[3] Ve **Fyzice** se na str. 372 píše o zakřivení, je to jedno.

a hybnost. To, že pole nemůžeme vidět jako argument samozřejmě neobstojí, protože například střed Země také nemůžeme vidět a přesto máme dobré důvody se domnívat, že existuje. Navíc, jistý druh elektromagnetického pole přece jen vidět můžeme – jde o světlo!

Zákon gravitačního působení dvou těles byl sice obecnou relativitou dalekosáhle zobecněn, ale stal se (po matematické stránce) daleko složitější. Naštěstí pro studenty i učitele, Newtonův gravitační zákon platí pro pomalé rychlosti (vůči rychlosti světla) a malé hmotnosti (jako je např. i hmotnost Země) velmi přesně, proto je dobré se o něm stále učit. To, že se gravitační síly přenášejí polem tedy můžeme na konci této kapitoly na nějakou dobu zastrčit někam hlouběji do své dlouhodobé paměti. S polní koncepcí sil se podrobněji seznámíme až při studiu elektromagnetismu.

Na tomto místě pouze uveďme, že pole příslušné nějakému objektu se snažíme popsat veličinami, které závisejí jen na vlastnostech onoho objektu (hmotnosti, náboji, ...) a na stavu tohoto objektu (poloze, rychlosti, ...), tj. nebudou záviset na vlastnostech objektů, které se v něm budou nacházet. Vyvolává-li částice o hmotnosti M gravitační pole v místě určeným polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$,[4] bude v tomto místě působit na částici o hmotnosti m silou o velikosti $F = GMm/r^2$. Chceme-li charakterizovat „sílu“ tohoto pole bez ohledu co do něj je či bude vloženo, zbavíme se jediné přímé charakteristiky „vložené“ částice – hmotnosti – jejím podělením. Veličina, zavedená vztahem

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{G}}}{m} = -G\frac{M}{r^2}\boldsymbol{r}^\circ \tag{7.6}$$

a nazývaná *intenzita gravitačního pole*, nám tak charakterizuje sílu, jíž by působilo gravitační pole vyvolané hmotností M ve vzdálenosti r od jejího středu na jednotkovou hmotnost (1 kg). Dovoluje nám tedy porovnávat „vydatnost“ gravitačního působení různých těles.

Podobně přes potenciální energii gravitačního působení se dostáváme ke skalární veličině charakterizující pole buzené hmotností M, k tzv. *potenciálu gravitačního pole*:

$$\varphi_G(\boldsymbol{r}) = \varphi_G(r) = \frac{E_p}{m} = -G\frac{M}{r} \tag{7.7}$$

Zkuste sami přijít na to, zdali, případně proč, platí vztah[5]

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\boldsymbol{G}} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi_G = -\left(\frac{\partial\varphi_G}{\partial x}, \frac{\partial\varphi_G}{\partial y}, \frac{\partial\varphi_G}{\partial z}\right) \tag{7.8}$$

7.3 Poznámky k souvislosti pohybů v radiálním a homogenním gravitačním poli

Radiálním je nazýváno takové pole, ve kterém vektor intenzity tohoto pole míří z nebo do jednoho bodu. *Homogenním* se nazývá takové pole, ve kterém je příslušný vektor intenzity v každém bodě prostoru týž, tj. nemění se z místa na místo. Podíváme-li se na vektory

[4] Počátek souřadnicové soustavy tedy opět klademe do částice M.

[5] Jen pro připomenutí: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

intenzity gravitačního pole Země z dálky, vidíme, že je celkem jasně radiální. Ovšem v malé oblasti blízko při Zemském povrchu (zhruba v 1 km^3) nejsou změny intenzity pole prakticky patrné, a tudíž zde gravitační pole můžeme považovat za homogenní.

Naším úkolem je nyní zjistit, jakou souvislost má gravitační síla Země působící na částici o hmotnosti m, tj. $(-GM_Z m/r^2)\boldsymbol{r}^\circ$, s tíhovou silou $m\boldsymbol{g}$. Abychom se vyhnuli zbytečným komplikacím, budeme do konce kapitoly předpokládat, že Země je stejnorodou nerotující koulí.

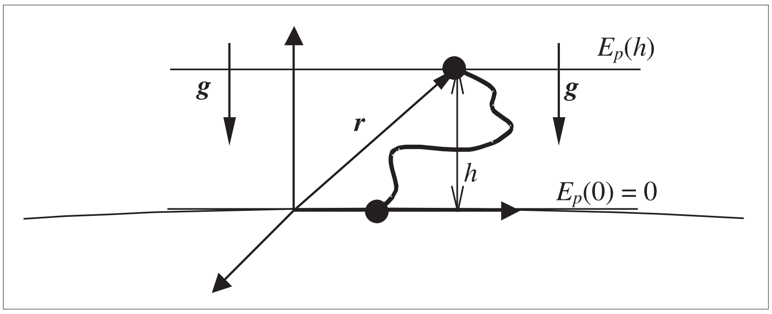
V malé výšce h nad Zemí působí na naši částici síla o velikosti

$$m\,\frac{GM_Z}{(R_Z+h)^2} \tag{7.9}$$

Protože však předpokládáme $R_Z \gg h$, můžeme s klidným srdcem uvažovat

$$m\,\frac{GM_Z}{(R_Z+h)^2} \approx m\,\frac{GM_Z}{R_Z^2} \tag{7.10}$$

kde konstanta GM_Z/R_Z^2 slušně aproximuje tíhové zrychlení. Označíme-li $g = GM_Z/R_Z^2$, získáme vztah pro tíhovou sílu.[6]



Obrázek 7.2: K homogennímu tíhovému poli Země.

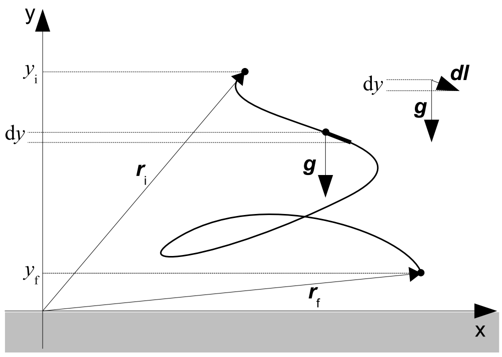
Souvislost potenciálních energií dokážeme takto: Potenciální energie $E_p(\boldsymbol{r})$ částice nacházející se v poli na místě o polohovém vektoru $\boldsymbol{r}$ je definována jako práce, kterou pole vykoná při přesunu z tohoto místa na místo, kde je dohodou stanoveno, že $E_p = 0$ (viz kapitola 4. Práce, výkon, energie).

Uvažujme nejprve potenciální energii v homogenním tíhovém poli Země. Zvolme si pro jednoduchost počátek soustavy souřadnic na zemském povrchu a počítejme práci, kterou vykonají tíhové síly při přechodu částice z místa s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_\mathrm{i}$ do místa s polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_\mathrm{f}$ (viz obr. 7.3).

Práce je dle definice dána integrálem

$$W_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}} = \int_{\boldsymbol{r}_\mathrm{i}}^{\boldsymbol{r}_\mathrm{f}} m\boldsymbol{g}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\ , \tag{7.11}$$

[6]Zopakujte si ve **Fyzice** co ke skutečné tíhové síle dále přispívá.



Obrázek 7.3: K tíhové energii.

kde d$\boldsymbol{l}$ je vektor infinitezimálního posunutí[7] a integrujeme po (v principu libovolné) trajektorii z místa určeného polohovým vektorem $\boldsymbol{r}_\mathrm{i}$ do místa $\boldsymbol{r}_\mathrm{f}$. Skalární součin nám však jakoukoliv změnu polohového vektoru $\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}(t + \mathrm{d}t) - \boldsymbol{r}(t)$ částice „promítne" do směru kolmého na povrch. Plyne to z toho, že pro všechny polohové vektory $\boldsymbol{r}$ je $\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r} = -|\boldsymbol{g}|y$, kde y je souřadnice částice na ose y. Proto i

$$\boldsymbol{g} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}(t + \mathrm{d}t) - \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r}(t) = |\boldsymbol{g}|[-y(t + \mathrm{d}t) - (-y(t))] = -|\boldsymbol{g}|\mathrm{d}y \ .$$

Vidíme tedy, že integrál 7.12 se redukuje na

$$W_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}} = -\int_{y_\mathrm{i}}^{y_\mathrm{f}} m|\boldsymbol{g}|\mathrm{d}y = m|\boldsymbol{g}|y_\mathrm{i} - m|\boldsymbol{g}|y_\mathrm{f} \ , \tag{7.12}$$

Což nám umožňuje přiřazení

$$W_{\mathrm{i}\to\mathrm{f}} = m|\boldsymbol{g}|y_\mathrm{i} - m|\boldsymbol{g}|y_\mathrm{f} = E_{g\mathrm{i}} - E_{g\mathrm{f}} \ . \tag{7.13}$$

Abychom dokončili jednoznačné přiřazení tíhové potenciální energie tíhovému působení (viz definice 4.17, musíme si zvolit nulový bod potenciální energie. Vzhledem k tomu, že práce tíhové síly závisí pouze na výšce nad povrchem, nebude se jednat jen o bod, ale o celou rovinu – mluvíme pak o hladině potenciální energie. Nejčastější volbou pro řešení školských příkladů je vodorovný zemský povrch.[8] Tíhová potenciální energie částice o hmotnosti m v místě, jehož polohový vektor $\boldsymbol{r}$ se nachází ve výšce h nad povrchem, je tedy definována vztahem

$$E_p(y) = mgy \ , \tag{7.14}$$

kde jsme označili $|\boldsymbol{g}| \equiv g$. Označíme-li ještě výšku nad nulovou hladinou jako h, získáme pro tíhovou energii známý výraz $E_g = mgh$. Vidíme tak znovu, že tíhové pole je konzervativní

[7] Důvod, proč značíme změnu polohového vektoru (vektor posunutí) $\mathbf{d}\boldsymbol{l}$ místo tradičního $\mathbf{d}\boldsymbol{r}$ je, že v příštím se budeme zabývat velikostí vektoru posunutí $|\mathbf{d}\boldsymbol{r}|$ a zároveň změnou vzdálenosti r od centra – ta se ovšem přirozeně označuje dr. Mohlo by tak docházet k záměně $|\mathbf{d}\boldsymbol{r}|$ a dr.

[8] Ale to není nutné, je možno volit i např. povrch stolu či (vodorovnou) podlahu letadla.

– lze v něm zavést potenciální energii (nezávisle na trajektorii) a hlavně, platí v něm zákon zachování mechanické energie.

O radiálním gravitačním poli lze dokázat totéž. My se nyní budeme zajímat pouze o souvislost výše uvedené potenciální energie tíhového pole a gravitační potenciální energie zavedené ve **Fyzice** na str. 363 či vztahem 7.7. Podle 4.17 je gravitační potenciální energie rovna (soustava souřadnic opět v centru Země)

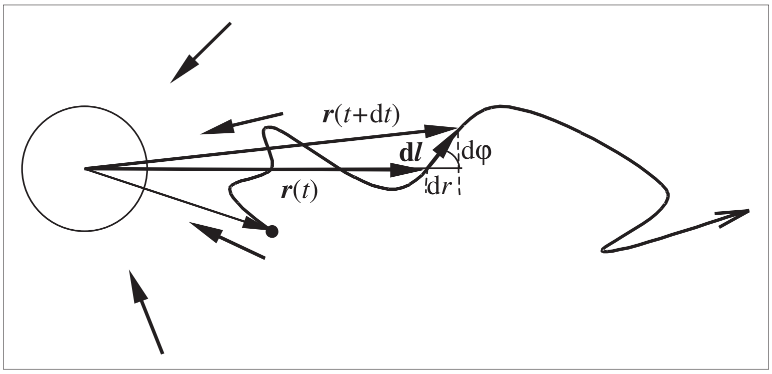
$$E_p(\boldsymbol{r_i}) = \int_{\boldsymbol{r_i}}^{\infty} -G\,\frac{mM_Z}{r^2}\,\boldsymbol{r}^\circ \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{7.15}$$

kde $\boldsymbol{r_i}$ značí počáteční polohu částice. Skalární součin opět promítá změny $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ polohového vektoru do směru rovnoběžného se směrem pole (viz obr. 7.4)

$$\boldsymbol{r}^\circ \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mathrm{d}l\cos\varphi = \mathrm{d}r \tag{7.16}$$

Máme tedy celkem

$$E_p(r_i) = \int_{r_i}^{\infty} -G\,\frac{mM_Z}{r^2}\,\mathrm{d}r = \left[G\,\frac{mM_Z}{r}\right]_{r_i}^{\infty} = -G\,\frac{mM_Z}{r_i} \tag{7.17}$$



Obrázek 7.4: Průmět elementu trajektorie do radiálního pole.

Položíme-li nulovou hladinu potenciální energie znova na povrch Země, můžeme příslušnou potenciální energii spočítat takto:

$$E_p = \int_{R_Z+h}^{R_Z} -G\,\frac{mM_Z}{r^2}\,\mathrm{d}r = \left[G\,\frac{mM_Z}{r}\right]_{R_Z+h}^{R_Z} = \frac{GmM_Z}{R_Z} - \frac{GmM_Z}{R_Z+h} \tag{7.18}$$

Uvážíme-li znova $R_Z \gg h$, můžeme psát

$$E_p(h) = m\frac{GM_Z}{R_Z(R_Z+h)}h \approx m\frac{GM_Z}{R_Z^2}h \tag{7.19}$$

což s dosazením $g = GM_Z/R_Z^2$ dává opět

$$E_p = mgh. \tag{7.20}$$

Kapitola 8

Mechanika tekutin

Cíle

1. Vědět co jsou to tekutiny.
2. Umět zavést hustotu a tlak jako fyzikální veličiny.
3. Znát fyzikální vlastnosti hydrostatického tlaku.
4. Znát princip rtuťového barometru a otevřeného kapalinového manometru.
5. Umět vysvětlit Pascalův zákon a princip hydraulického zvedáku.
6. Umět odvodit a na příkladech vysvětlit Archimédův zákon.
7. Vědět co je to ideální kapalina.
8. Umět popsat jednotlivé druhy proudění.
9. Vědět co je to proudnice a co objemový a hmotnostní tok.
10. Umět odvodit rovnici kontinuity a umět ji užívat při řešení konkrétních úloh.
11. Umět odvodit Bernoulliovu rovnici a umět ji užívat při řešení konkrétních úloh.

Pokyny

1. Prostudujte kapitolu 15 **Tekutiny**.
2. Prostudujte dodatky k tomuto tématu.

Kontroly

1. Poctivě projděte všechny kontroly v doporučených kapitolách a odpovězte na otázky za jednotlivými kapitolami.

2. Řešte úlohy: **k odst. 15.3** — 1C, 5C, 6C*, 7Ú, 8Ú; **k odst. 15.4** — 9C*, 11C, 12C*, 13C*, 14C, 15C, 17C, 18C, 22Ú, 23Ú, 25Ú; **k odst. 15.5** — 27C, 28Ú*; **k odst. 15.6** — 30C; **k odst. 15.7** — 31C, 33C, 35C, 38C*, 39C, 41Ú, 43Ú*, 46Ú*, 47Ú, 49Ú, 51Ú, 52Ú*; **k odst. 15.9** — 53C, 55C*, 56Ú, 57Ú; **k odst. 15.10** — 59C, 61C, 65C, 67C, 68C*, 70Ú*, 71Ú, 74Ú, 75Ú, 76Ú, 77Ú, 78Ú, 79Ú*, 80Ú*.

Dodatky

8.1 K rovnováze kapalin

V paragrafu 5.4.1 jsme se seznámili se základy popisu kontinua. Na tomto místě si uděláme jednoduchou ilustraci toho, jak se tento aparát uplatňuje v popisu kapalin.

Z mechanického hlediska je chování kapalin a plynů značně podobné, proto je označujeme společným názvem *tekutiny.* Stejně jako ve **Fyzice** v kapitole 15 se budeme zabývat pouze *ideálními tekutinami.* Z hlediska napětí lze ideální tekutinu definovat tak, že v ní neexistuje smykové napětí, tj. žádné působení na povrch tekutiny v ní nedokáže vyvolat síly, které by měly nenulový tečný průmět na libovolně zvolenou plošku. Někdy se též říká, že ideální tekutiny neprojevují odpor při střihu. Navíc v takovéto tekutině nelze uplatnit síly tahové – realizují se pouze síly tlakové. Celkem tedy, uvnitř ideální tekutiny působí na kteroukoli plošku pouze kolmé (tzv. tlakové) síly, snažící se tuto plošku stlačit.

Z matematického hlediska takovýmto předpokladům odpovídá pouze tenzor napětí ve tvaru (viz vztahy 5.20 a 5.4.1)

$$\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

neboť tento tenzor si svůj tvar zachovává vzhledem ke všem navzájem pootočeným kartézským soustavám souřadnic. Číslo $p \geq 0$, obecně závislé na souřadnicích místa, ve kterém jej určujeme, nazýváme *tlak.*

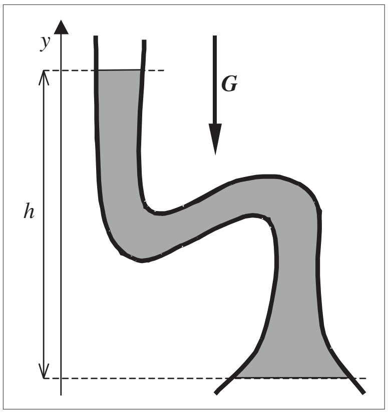
Podívejme se nyní na rovnováhu tekutin z hlediska našeho formalismu. Působí-li na tekutinu objemová síla $\boldsymbol{G}$ (budeme v souladu s předchozím označovat též jako G_i), musí podle rovnice 5.21 po dosazení za σ_{ij} z 8.1 platit

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + G_i = 0^1 \tag{8.1}$$

[1]Tuto rovnici můžeme přepsat i vektorově: $-\boldsymbol{\nabla} p + \boldsymbol{G} = 0$. O výrazu

$$\boldsymbol{\nabla} p = \left(\frac{\partial p}{\partial x_1}, \frac{\partial p}{\partial x_2}, \frac{\partial p}{\partial x_3}\right)$$

viz poznámka na str. 26.



Obrázek 8.1: K hydrostatickému tlaku.

Nadále se budeme zabývat *dokonalou kapalinou*, což je dokonalá tekutina, pro kterou navíc platí, že její hustota je v celém jejím objemu konstantní, tj. $\rho \neq \rho(\boldsymbol{r})$ (tj. je nestlačitelná). V tomto případě rovnici 8.1 nazýváme *rovnice hydrostatické rovnováhy*. V případě, že objemovou silou je síla tíhová $G_i = (0, \rho g, 0)$, budou rovnice 8.1 v souřadnicové soustavě s osami $x \equiv x_1, y \equiv x_2, z \equiv x_3$ vyjádřeny vztahy (viz obr. 8.1)

$$\frac{\partial p(x,y,z)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial y} = -\rho g, \quad \frac{\partial p(x,y,z)}{\partial z} = 0 \tag{8.2}$$

První a třetí výraz mají za následek, že $p(x, y, z) = p(y)$, tj. že p se kolmo k tíhové síle nemění. Přepíšeme-li prostřední vztah na obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}p(y)}{\mathrm{d}y} = -\rho g \tag{8.3}$$

je ihned vidět, že pro dokonalou kapalinu ($\rho =$ konst.) můžeme její řešení zapsat ve tvaru

$$p(y) = -\rho g y + \kappa \tag{8.4}$$

kde κ je jediná neznámá konstanta, kterou musíme určit z okrajových podmínek. K tomu nám postačí znalost tlaku v jediném vybraném bodě kapaliny. Změna tlaku v tomto bodě způsobí změnu konstanty κ o stejnou hodnotu, a tedy se o stejnou hodnotu změní i tlak v celé kapalině (viz 8.4). Poslední tvrzení je tak vlastně formulací *Pascalova zákona*, uvedeného ve **Fyzice** na straně 391.

Zvolíme-li v rovnici 8.4 referenční bod na hladině kapaliny, které přiřadíme souřadnici $y = 0$, bude souřadnice $-y$ udávat hloubku h pod hladinou. Po přeznačení tak můžeme pro příslušný tlak psát

$$p(h) = \rho g h + p_0 \tag{8.5}$$

kde p_0 je tlak působící na hladinu kapaliny. Ze způsobu odvození tohoto vztahu, určujícímu tzv. *hydrostatický tlak*, je zřejmé, že nezávisí na tvaru trubice či nádoby, ve které se kapalina nachází – závisí pouze na hloubce vyšetřovaného bodu pod hladinou.

S dalšími postupy a výsledky aplikace popisu kontinua na tekutiny se seznámíte ve speciálních přednáškách.

Kapitola 9

Kmitání

Cíle

1. Znát definici frekvence, periody, amplitudy, úhlové frekvence, fáze a počáteční fáze kmitavého pohybu.
2. Znát souvislost výchylky, rychlosti a zrychlení harmonického pohybu částice a umět je odvodit z pohybové rovnice pro harmonický oscilátor.
3. Znát vztahy mezi kinetickou, potenciální a celkovou mechanickou energií harmonického oscilátoru.
4. Umět matematicky popsat kmity torzního, matematického a fyzického kyvadla.
5. Vědět jak lze pomocí reverzního kyvadla měřit tíhové zrychlení.
6. Znát souvislosti kmitavého pohybu a rovnoměrného pohybu po kružnici.
7. Umět slovně i matematicky popsat tlumené a nucené kmity oscilátoru.
8. Umět charakterizovat rezonanci a její projevy.
9. Vědět co je to parametrická rezonance.

Pokyny

1. Prostudujte kapitolu 16 **Kmity**.
2. Prostudujte dodatky k tomuto tématu.

Kontroly

1. Poctivě projděte všechny kontroly v doporučených kapitolách a odpovězte na otázky za jednotlivými kapitolami.

2. Řešte úlohy: **k odst. 16.3** — 1C, 3C, 5C, 7C*, 13C, 15C, 19Ú, 21Ú, 23Ú, 24Ú*, 25Ú, 27Ú, 31Ú, 33Ú, 34Ú, 35Ú, 37Ú, 39Ú; **k odst. 16.4** — 41C, 44C, 47Ú, 49Ú, 50Ú, 51Ú*; **k odst. 16.5** — 53Ú, 54Ú; **k odst. 16.6** — 59C, 60C*, 63C, 65C, 67C, 68C, 69C, 72Ú*, 73Ú, 74Ú*, 77Ú, 79Ú*, 82Ú, 83Ú*; **k odst. 16.8** — 85C, 87Ú, 88Ú, 89Ú*; **k odst. 16.9** — 90c, 91Ú.

3. Řešte úlohy pro počítač*.

Dodatky

9.1 K tlumenému oscilátoru

Naznačíme postup řešení diferenciální rovnice tlumeného kmitání oscilátoru pohybujícího se po ose x (viz. **Fyzika**, strana 424), tj. budeme řešit rovnici

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -kx - b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{9.1}$$

Tato rovnice vznikla dosazením tzv. harmonické síly $F_h = -kx = -m\omega x$, kde k je tuhost pružiny[1] a síly vyvolávající tlumení $F_b = -bv$, kde b je součinitel útlumu, do Newtonovy pohybové rovnice (II. Newtonův zákon).

Z matematického hlediska je tato rovnice obyčejnou homogenní diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty. Tento hrozivě znějící název matematikům mimo jiné říká, že všechna řešení takovýchto rovnic lze složit libovolnou lineární kombinací dvou nezávislých řešení. Přitom dvě funkce jsou považovány za nezávislé tehdy, když jedna není násobkem druhé. Navíc je obecně známo, že řešení takovýchto rovnic je vždy vhodné zkusit ve tvaru $x = \kappa e^{\lambda t}$, kde zatím neznámé konstanty κ a λ ještě musí být určeny. Podívejme se na to jak to udělat.

Přepišme si nejprve 9.1 na tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = 0 \tag{9.2}$$

Pro zkrácení zápisu by bylo vhodné zavést nové označení výrazu b/m, ale my budeme z estetických důvodů, které vyplynou na povrch až později, psát

$$\frac{b}{m} \equiv 2B \tag{9.3}$$

Tedy, dosadíme-li výraz $x = \kappa e^{\lambda t}$ do rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega^2 x = 0 \tag{9.4}$$

[1] ω je úhlová frekvence kmitání netlumeného oscilátoru, platí $\omega^2 = k/m$.

bude

$$\kappa\lambda^2 e^{\lambda t} + 2B\kappa\lambda e^{\lambda t} + \kappa\omega^2 e^{\lambda t} = 0 \ .$$

Protože $\kappa e^{\lambda t} \neq 0$, můžeme krátit a získáme tak rovnici, které se říká *charakteristická rovnice*

$$\lambda^2 + 2B\lambda + \omega^2 = 0 \ . \tag{9.5}$$

Řešením této kvadratické rovnice je

$$\lambda_{1,2} = -B \pm \sqrt{B^2 - \omega^2} \ .$$

A protože v případě, že $B \neq \omega$, jsou řešení

$$x_1 = \kappa_1 e^{\lambda_1 t} = \kappa_1 e^{-Bt+\sqrt{B^2-\omega^2}t} \quad \text{a} \quad x_2 = \kappa_2 e^{\lambda_2 t} = \kappa_2 e^{-Bt-\sqrt{B^2-\omega^2}t} \tag{9.6}$$

nezávislá a obecné řešení rovnice 9.4, bude

$$x(t) = \kappa_1 e^{-Bt+\sqrt{B^2-\omega^2}t} + \kappa_2 e^{-Bt-\sqrt{B^2-\omega^2}t} = e^{-Bt}(\kappa_1 e^{+\sqrt{B^2-\omega^2}t} + \kappa_2 e^{-\sqrt{B^2-\omega^2}t}) \tag{9.7}$$

Prozkoumejme nyní různé poměry součinitele útlumu $b = 2mB$ a úhlové frekvence netlumených kmitů ω

- $\frac{b}{2m} = B > \omega$

  V tomto případě má řešení tvar funkce

  $$\kappa_1 e^{-\alpha_1 t} + \kappa_2 e^{-\alpha_2} \tag{9.8}$$

  kde $\alpha_{1,2} = B \pm \sqrt{B^2 - \omega^2}t > 0$ a je patrné, že tento pohyb je s narůstajícím časem silně tlumen – nazýváme jej *tlumený aperiodický pohyb*. Při tomto druhu pohybu se oscilátor nedostane přes rovnovážnou polohu, nejde tedy o kmity.

- $\frac{b}{2m} = B < \omega$

  V tomto případě se pod odmocninou $\sqrt{B^2 - \omega^2}$ nachází záporné číslo. Můžeme ovšem psát

  $$\sqrt{-1(\omega^2 - B^2)} = \sqrt{-1}\sqrt{\omega^2 - B^2} = \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - B^2}$$

  kde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ je imaginární jednotka. Pro jednoduchost označme kladné číslo $\sqrt{\omega^2 - B^2}$ výrazem ω_1

  $$\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - B^2} \tag{9.9}$$

  Celkem tak máme

  $$x(t) = \kappa_1 e^{(-B+\mathrm{i}\omega_1)t} + \kappa_2 e^{(-B-\mathrm{i}\omega_1)t}$$

  Tento výraz však ještě můžeme upravit vzhledem k platnosti velmi důležitých rovností (tzv. *Eulerovy vztahy*)

  $$e^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi \quad \text{a} \quad e^{-\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi - \mathrm{i}\sin\varphi$$

na

$$x(t) = e^{-Bt}(\kappa_1 e^{+\mathrm{i}\omega_1 t} + \kappa_2 e^{-\mathrm{i}\omega_1 t}) = e^{-bt}[\mathrm{i}(\kappa_1 - \kappa_2)\sin\omega_1 t + (\kappa_1 + \kappa_2)\cos\omega_1 t]$$

což po substituci $\mathrm{i}(\kappa_1 - \kappa_2) = A\cos\varphi_0$ a $\kappa_1 + c_2 = A\sin\varphi_0$ dává

$$x(t) = e^{-Bt}[A\cos\varphi_0 \sin\omega_1 t + A\sin\varphi_0\cos\omega_1 t]$$

Použitím součtového vzorce

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

nakonec dostáváme

$$x(t) = Ae^{-Bt}\sin(\omega_1 t + \varphi_0) \tag{9.10}$$

Tento výraz je obecným řešením diferenciální rovnice 9.4 s libovolnými (tzv. integračními) konstantami A a φ_0, které se určují až z počátečních podmínek – říkáme jim amplituda a počáteční fáze. Posuneme-li tedy počáteční fázi φ_0 o $-\frac{\pi}{2}$ (což nám nezmění obecnost řešení) a přeznačíme-li $A = x_m$, dostaneme výraz shodný s výrazem (16.40) na straně 424 ve **Fyzice**.

Na závěr si můžeme všimnout, že kdyby nebylo tlumení, člen e^{-Bt} by byl roven jedné a frekvence kmitání tlumeného oscilátoru $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - B^2}$ by byla rovna frekvenci kmitání netlumeného oscilátoru ω.

- $\frac{b}{2m} = B = \omega$

  V tomto případě z řešení kvadratické rovnice 9.5 získáme pouze jeden kořen $\lambda = -B$. Abychom získali úplné řešení diferenciální rovnice 9.4, musíme tedy najít ještě jedno nezávislé řešení. Můžete si sami ověřit, že výraz

$$\kappa_2 t e^{-Bt}$$

je řešením rovnice 9.4 a je řešením nezávislým na $\kappa_1 e^{-Bt}$. Obecné řešení je pak dáno vztahem

$$x(t) = \kappa_1 e^{-Bt} + \kappa_2 t e^{-Bt} = e^{-Bt}(\kappa_1 + \kappa_2 t) \tag{9.11}$$

O pohybu oscilátoru popsaném touto rovnicí lze ukázat, že může rovnovážnou polohou proběhnout nanejvýš jednou a že se za jinak stejných podmínek blíží k rovnovážné poloze rychleji než jakýkoli z aperiodicky se pohybujících oscilátorů – říkáme, že takový oscilátor vykonává *mezní aperiodický pohyb*.

Kapitola 10

Vlnění

Cíle

1. Znát základní rozdíly mezi částicí a vlnou.
2. Vědět čím se liší a co mají společného mechanické, elektromagnetické a de Broglieho vlny.
3. Umět popsat charakteristické vlastnosti příčných a podélných vln.
4. Umět matematicky popsat postupnou vlnu a znát význam amplitudy, vlnové délky, úhlového vlnočtu, periody, frekvence a úhlové frekvence vlny.
5. Znát obecnou definici (fázové) rychlosti postupné vlny.
6. Umět pomocí rozměrové analýzy i užitím 2. Newtonova zákona určit rychlost vlny na struně.
7. Umět vysvětlit jakým způsobem se vlnám přiřazuje energie a jak s počítá výkon přenášený vlnou.
8. Znát aplikaci principu superpozice a jeho souvislost s Fourierovou analýzou.
9. Umět vysvětlit podstatu interference vln.
10. Ovládat popis vln pomocí fázorů.
11. Znát vlastnosti stojatých vln a umět je matematicky popsat.
12. Vědět jak se mění fáze vln na různých rozhraních.
13. Znát vlnové délky vlastních kmitů upevněné struny.
14. Umět vysvětlit pojmy paprsek a vlnoplocha.

15. Umět odvodit vztah pro rychlost a tlakové změny zvuku ve vzduchu z druhého Newtonova zákona.

16. Znát podmínky pro fázi a dráhový rozdíl konstruktivně a destruktivně interferujících vln.

17. Umět definovat intenzitu zvuku a její hladinu.

18. Vědět jak vznikají zázněje a umět své úvahy matematicky podložit.

19. Umět odvodit matematický vztah pro popis Dopplerova jevu.

20. Znát alespoň několik příkladů živočišné činnosti (člověk je též živočich:-)), při nichž se Dopplerova jevu užívá.

21. Vědět jak vzniká Machův kužel.

Pokyny

1. Prostudujte kapitolu 17 **Vlny I**

2. Prostudujte kapitolu 18 **Vlny II**.

3. Prostudujte dodatky k tomuto tématu.

Kontroly

1. Poctivě projděte všechny kontroly v doporučených kapitolách a odpovězte na otázky za jednotlivými kapitolami.

2. Řešte úlohy: **k odst. 17.5** — 3C, 5C, 6C, 7C, 11C, 14Ú*, 15Ú, 16Ú; **k odst. 17.6** — 18C*, 21C*, 23C, 24C*, 25Ú, 27Ú, 29Ú, 31Ú*; **k odst. 17.7** — 33C, 35C; **k odst. 17.9** — 37C, 38Ú; **k odst. 17.10** — 39C, 43Ú, 44Ú*; **k odst. 17.12** — 45C, 47Ú, 48C*, 53C, 57Ú, 59Ú, 60Ú*, 63Ú, 65Ú*; **k odst. 18.2** — 1C*, 2C*, 3C*, 5C*, 7Ú, 9Ú, 10Ú*, 11Ú; **k odst. 18.3** — 12C*, 15C*, 16C*, 19Ú, 20Ú; **k odst. 18.4** — 21Ú, 22Ú*, 23Ú, 24Ú, 25Ú, 26Ú*; **k odst. 18.5** — 29C, 32C*, 35C, 38Ú, 39Ú, 40Ú*, 41Ú, 43Ú, 45Ú; **k odst. 18.6** — 51C, 53Ú, 55Ú, 57Ú*, 59Ú; **k odst. 18.7** — 61C, 63Ú; **k odst. 18.8** — 65C, 67C, 70C, 71C, 74Ú, 75Ú, 77Ú, 79Ú, 81Ú, 83Ú, 84Ú*, 87Ú, 89Ú; **k odst. 18.9** — 90C, 91C, 93C*, 94Ú, 95Ú*.

Dodatky

10.1 Vlnová rovnice

Z předchozího studia fyziky již víte, že matematický popis pohybů získáváme obvykle řešením diferenciálních rovnic, které sestavujeme na základě nejrůznějších úvah (zatím obvykle pomocí Newtonových pohybových rovnic). Podívejme se nyní, jaká diferenciální rovnice odpovídá popisu pohybu vln. Najdeme-li takovou, budeme napříště hned po sestavení rovnic pohybu vědět, že popisovaný systém je schopen vlnového pohybu.

Ve **Fyzice** na straně 443 se tvrdí, že každou vlnu postupující ve směru x a kmitající příčně ve směru y, lze popsat rovnicí ve tvaru

$$y(x,t) = h(x - vt) \tag{10.1}$$

kde h je libovolná funkce argumentu $x-vt$ a v je (fázová) rychlost pohybu vlny, považovaná v tomto případě za konstantu. Obdobně vlnu šířící se opačnou rychlostí lze popsat rovnicí

$$y'(x,t) = g(x + vt) \tag{10.2}$$

Naším úkolem je nyní najít takovou diferenciální rovnici, jejímž řešením bychom získali výše uvedené vztahy. Zkusme derivovat rovnici pro $y(x,t)$ jako složenou funkci $y(x,t) = h(f(x,t))$, kde $f(x,t) \equiv x - vt$, podle x i podle t. Nejprve tedy budeme derivovat funkci h podle argumentu f a vynásobíme to derivací f podle x nebo t. Získáme tak

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}f}\frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{a} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}f}\frac{\partial f}{\partial t} \tag{10.3}$$

ale protože je

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x}(x - vt) = 1 \quad \text{a} \quad \frac{\partial f}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t}(x - vt) = -v \tag{10.4}$$

máme tak

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}f} \quad \text{a} \quad \frac{\partial y}{\partial t} = -v\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}f} \tag{10.5}$$

Derivujeme-li ještě jednou, bude

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}f} = \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}f^2}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}f^2} \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -v\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}f} = -v\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}f^2}\frac{\partial f}{\partial t} = (-v)^2\frac{\mathrm{d}^2 h}{\mathrm{d}f^2}
\end{aligned}$$

Srovnáme-li oba výrazy, získáme rovnici

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{10.6}$$

Kdybychom místo vlny šířící se ve směru osy x vzali vlnu šířící se proti směru osy x, tj. $y'(x,t)$, získáme obdobným postupem stejnou rovnici (odpovídá to záměně $v \to -v$). Zpětně lze samozřejmě ověřit, že každá funkce typu 10.1 či 10.2 je řešením rovnice 10.6 –

této rovnici říkáme *vlnová rovnice.* Tato rovnice má některé zajímavé vlastnosti, podívejme se na ně.

Předně, každé řešení této rovnice lze získat lineární kombinací funkcí typu 10.1 a 10.2. Dále, je-li nějaká funkce $\varphi(x,t)$ řešením této rovnice, tj. platí-li

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{10.7}$$

je tímto řešení i každá funkce, která je násobkem φ, tj. funkce $\kappa\varphi$ je také řešením této rovnice pro libovolnou konstantu κ (zkuste si sami dosazením ověřit). Této významné vlastnosti se říká *homogenita rovnice.* Konečně, jsou-li $\varphi_1(x,t)$ a $\varphi_2(x,t)$ libovolná dvě řešení rovnice 10.7, tj. platí-li

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} = 0 \tag{10.8}$$

je řešením i libovolná lineární kombinace $\kappa_1\varphi_1 + \kappa_2\varphi_2$. Ověřte, že skutečně platí

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\kappa_1\varphi_1 + \kappa_2\varphi_2) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\kappa_1\varphi_1 + \kappa_2\varphi_2) = 0 \tag{10.9}$$

Tato vlastnost se nazývá *linearita rovnice* a je velmi významná, protože děje, které jsou takovými rovnicemi popsány splňují *princip superpozice.*

Literatura

[1] Halliday D, Resnick R., Walker J.: *Fyzika.* Vutium & Prometheus, Brno 2000

[2] Kvasnica a kol.: *Mechanika.* Academia, Praha 1988

[3] Mechlová E. a Košťál K. za kol.: *Výkladový slovník fyziky (pro základní vysokoškolský kurz).* Prometheus, Praha 1999

[4] Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky 1/3.* Fragment, Havlíčkův Brod 2000

[5] Šantavý I.: *Mechanika.* SPN, Praha 1993

[6] Baník I., Baník R., Zámečník J.: *Fyzika netradičně. Mechanika.* Alfa, Bratislava 1989

[7] Nahodil J.: *Fyzika v běžném životě.* Prometheus, Praha 1996

[8] Svoboda E. a kol.: *Přehled středoškolské fyziky.* Prometheus, Praha 1996

[9] Králík J.: *Úvod do studia fyziky* (skriptum). PF UJEP, Ústí nad Labem 2003

Rejstřík