ALGEBRAICKÉ NEROVNOSTI

JAN MALÝ
UK V PRAZE A UJEP V ÚSTÍ N. L.

Příklad 1. Jsou dána čísla $r, s > 0$. Najděte nejmenší a největší hodnotu souřadnice z na množině

$$\{[x, y, z]\colon x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad x + y + z = s\}.$$

Řešení. Víme, že

$$2xy + 2yz + 2zx = (x + y + z)^2 - x^2 - y^2 - z^2 = s^2 - r^2.$$

Máme

$$\begin{aligned} 0 &\le (x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) - z^2 - 2xy - 2xz - 2yz + 2(x+y)z \\ &= r^2 - z^2 - (s^2 - r^2) + 2(x+y+z)z - 2z^2 \\ &= r^2 - z^2 - (s^2 - r^2) + 2sz - 2z^2 \\ &= -(3z^2 - 2sz + s^2 - 2r^2). \end{aligned}$$

Máme $3z^2 - 2sz + s^2 - 2r^2 \le 0$, diskriminant je $D = 8(3r^2 - s^2)$, řešením kvadratické nerovnosti je

$$\begin{cases} \emptyset, & D < 0, \\ \{s/3\}, & D = 0, \\ [\frac{1}{3}(s - \sqrt{D/4}),\ \frac{1}{3}(s + \sqrt{D/4})], & D > 0. \end{cases}$$

V tomto rozmezí se tedy z musí pohybovat. Naopak, musíme dokázat, že pro $D \ge 0$ existuje bod $[x, y, z]$, ve kterém z nabývá nalezené maximální, resp. minimální hodnoty. Nechť $D = 8(3r^2 - s^2) \ge 0$, $c = \frac{1}{3}(s \pm \sqrt{D/4})$. Položme $a = b = \frac{1}{2}(s - c)$. Potom zřejmě $a + b + c = s$. Položme $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Chceme ukázat, že $R = r$. Máme

$$\begin{aligned} 0 &= (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \\ &= (a^2 + b^2 + c^2) - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc + 2(a+b)c \\ &= R^2 - c^2 - (s^2 - R^2) + 2(a+b+c)c - 2c^2 \\ &= R^2 - c^2 - (s^2 - R^2) + 2sc - 2c^2 \\ &= -(3c^2 - 2sc + s^2 - 2R^2). \end{aligned}$$

Jelikož $z = c$ řeší $3z^2 - 2sz + s^2 - 2r^2 = 0$, máme $R^2 = r^2$, tedy také $R = r$. Bod (a, b, c) tedy leží v naší množině.

Příklad 2. Nechť $x_1, \ldots, x_n$ jsou kladná reálná čísla, jejichž součin je roven jedné. Potom

$$x_1 + \cdots + x_n \ge n.$$

Rovnost nastává, právě když jsou všechna x_i stejná.

Řešení. Postupujeme indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení platí. Nechť $n \ge 2$ a tvrzení platí pro $(n-1)$ čísel, chceme odvodit platnost pro n čísel. Pokud jsou všechna x_i stejná, je to jasné. Nechť tedy nejsou stejná a budeme dokazovat ostrou nerovnost.

Seřaďme si je podle velikosti $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$. Jelikož x_i nejsou stejná, máme $x_1 < 1 < x_n$, tedy $(x_1 - 1)(x_n - 1) < 0$, neboli

$$x_1 + x_n - x_1 x_n > 1.$$

Použijeme indukční předpoklad na čísla $x_2, \dots, x_{n-1}, x_1 x_n$, dostaneme

$$x_2 + \cdots + x_{n-1} + x_1 x_n \ge n - 1,$$

Sečtením obou nerovností dostaneme požadovanou.

Věta 1 (AG nerovnost)**.** Nechť $a_1, \dots, a_n$ jsou kladná reálná čísla. Potom

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

Rovnost nastává, právě když jsou všechna a_i stejná.

Důkaz. Položme

$$x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}}.$$

Potom $x_1 \cdots x_n = 1$, tedy podle předchozího příkladu je $x_1 + \cdots + x_n \ge n$. Snadnou úpravou dostaneme požadovanou nerovnost.

Poznámka. AG je zkratka, jde o nerovnost mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

Věta 2 (Youngova nerovnost)**.** Nechť a, b jsou nezáporná reálná čísla a p, q jsou kladná reálná čísla. Nechť $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Rovnost nastává, právě když $a^p = b^q$.

Důkaz. Důkaz provedeme pouze pro p a q racionální, tj. $p = \frac{n+k}{k}$ a $q = \frac{n+k}{n}$. Do AG nerovnosti dosaďme k kopií čísla a^p a n kopií čísla b^q. Dostaneme

$$ab = \sqrt[n+k]{(a^p)^k (b^q)^n} \le \frac{ka^p + nb^q}{n+k} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Věta 3 (Hölderova nerovnost)**.** Nechť x_i, y_i, $i = 1, \dots, n$, jsou nezáporná reálná čísla a p, q jsou kladná reálná čísla. Nechť $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Potom

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \le \Big(x_1^p + \cdots + x_n^p\Big)^{1/p} \Big(y_1^q + \cdots + y_n^q\Big)^{1/q}.$$

Rovnost nastává, právě když existuje $\lambda > 0$ tak, že pro všechna i je $x_i^p = \lambda y_i^q$, anebo když všechna x_i nebo všechna y_i jsou nulová.

Důkaz. Položme

$$s := \Big(x_1^p + \cdots + x_n^p\Big)^{1/p}, \qquad t := \Big(y_1^q + \cdots + y_n^q\Big)^{1/q}.$$

Do Youngovy nerovnosti dosaďme $a = \frac{x_i}{s}$, $b = \frac{y_i}{t}$, dostaneme

$$\frac{x_i}{s} \frac{y_i}{t} \le \frac{x_i^p}{ps^p} + \frac{y_i^q}{qt^q}.$$

Sečteme přes i:

$$\frac{x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n}{st} \le \frac{x_1^p + \cdots + x_n^p}{ps^p} + \frac{y_1^q + \cdots + y_n^q}{qt^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tedy

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \le st = \Big(x_1^p + \cdots + x_n^p\Big)^{1/p} \Big(y_1^q + \cdots + y_n^q\Big)^{1/q},$$

což jsme měli dokázat.

Věta 4 (o přerovnání)**.** Nechť $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$ a $y_1 \le y_2 \le \cdots \le y_n$ jsou nezáporná reálná čísla a σ, τ jsou libovolné permutace čísel $1, 2, \dots, n$. Potom

$$x_{\sigma_1} y_{\tau_1} + \cdots + x_{\sigma_n} y_{\tau_n} \le x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Důkaz. Zcela zadarmo můžeme přeházet tak, že x_i budou seřazeny podle velikosti, tj. můžeme předpokládat $\sigma_i = i$. Dále jako jednoduché cvičení vidíme, že nerovnost platí pro dva sčítance. V obecném případě uvažujeme $i < j$ tak, že $\tau_i > \tau_j$. Potom

$$\begin{aligned} & x_1 y_{\tau_1} + \ldots + x_i y_{\tau_i} + \ldots + x_j y_{\tau_j} + \ldots x_n y_{\tau_n} \\ & \qquad \le x_1 y_{\tau_1} + \ldots + x_i y_{\tau_j} + \ldots + x_j y_{\tau_i} + \ldots x_n y_{\tau_n} \end{aligned}$$

Výraz jsme zvětšili na výraz s permutací, v níž je zaměněno τ_i a τ_j, ta však má blíž přirozenému uspořádání. Po konečném počtu kroků získáme výraz, kde též y_i jsou seřazena přirozeně, a ten je z nich největší.

Příklad 3. Nechť a, b, c jsou reálná čísla. Dokažte

$$a^3 b^5 + b^3 c^5 + c^3 a^5 \le a^8 + b^8 + c^8.$$

Řešení. Položme

$$\begin{aligned} x_1 = a^3,\ x_2 = b^3,\ x_3 = c^3, \\ y_1 = a^5,\ y_2 = b^5,\ y_3 = c^5. \end{aligned}$$

Můžeme předpokládat, že x_i jsou seřazená podle velikosti, pak ale y_i jsou také seřazená podle velikosti. Podle věty o přerovnání máme

$$x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 \le x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3,$$

což je přesně to co chceme.

Jiné řešení. Youngova nerovnost dává

$$a^3 b^5 \le \frac{(a^3)^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + \frac{(b^5)^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}},$$

neboli

$$8a^3 b^5 \le 3a^8 + 5b^8.$$

Podobně

$$\begin{aligned} 8b^3 c^5 \le 3b^8 + 5c^8, \\ 8c^3 a^5 \le 3c^8 + 5a^8. \end{aligned}$$

Po sečtení dostaneme

$$8a^3 b^5 + 8b^3 c^5 + 8c^3 a^5 \le 8a^8 + 8b^8 + 8c^8.$$

Příklad 4. Nechť a, b, c jsou nezáporná reálná čísla a $p > 1$. Dokažte

$$(a^p + b^p + c^p) \le (a + b + c)^p \le 3^{p-1}(a^p + b^p + c^p).$$

Vlevo nastává rovnost když dvě z čísel jsou nuly, vpravo když všechna čísla jsou stejná.

Řešení. Levá nerovnost. Položme

$$x = \frac{a}{a+b+c}, \quad y = \frac{b}{a+b+c}, \quad z = \frac{c}{a+b+c}.$$

Potom $x, y, z \le 1$, tedy $x^p \le x$, $y^p \le y$, $z^p \le z$. Sečtením

$$\frac{a^p + b^p + c^p}{(a+b+c)^p} \le \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1,$$

zbývá vynásobit obě strany jmenovatelem vlevo.

Pravá nerovnost. Položme $q = \frac{p}{p-1}$, pak $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Z Hölderovy nerovnosti

$$\begin{aligned} a+b+c = 1a+1b+1c &\le \left(1^q+1^q+1^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(a^p+b^p+c^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 3^{\frac{p-1}{p}} \left(a^p+b^p+c^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Umocněním na p-tou dostaneme požadovanou nerovnost.

Příklad 5.

$$x+y+z=12, \quad x^2+y^2+z^2=54.$$

(a) Každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9.
(b) Každé z čísel xy, yz, zx je nejvýše 25.
(c) Některé z čísel x, y, z je nejvýše 3.
(d) Některé z čísel x, y, z je alespoň 5.

Řešení. Máme

$$\begin{aligned} 144 = (x+y+z)^2 &= (x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+zx) \\ &= 54 + 2(xy+yz+zx), \end{aligned}$$

odtud

$$xy+yz+zx = \frac{1}{2}(144-54) = 45.$$

(a) Každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9. Sečtením vztahů

$$\begin{aligned} &2(xy+yz+zx) = 90 \\ &2(xy-yz-xz) = (x+y-z)^2 - (x^2+y^2+z^2) \ge -54 \end{aligned}$$

dostaneme

$$4xy \ge 36, \qquad \text{neboli} \;\; xy \ge 9.$$

(b) Každé z čísel xy, yz, zx je nejvýše 25. Najdeme nejprve takové řešení, že $xy = 25$. Označme $p = x+y$, potom $45 = xy+yz+zx = 25+zp$. Ze soustavy rovnic

$$\begin{aligned} p+z &= 12, \\ zp &= 20 \end{aligned}$$

dopočítáme, že $p = 2$, $z = 10$, nebo $p = 10$, $z = 2$. Jelikož vždy $4xy \le (x+y)^2$, možnost $p = 2$ nepřipadá v úvahu. Tedy $x+y = 10$, $xy = 25$ a odtud $x = y = 5$. K tomuto výsledku jsme mohli dojít i hádáním.

Už jsme dospěli k jednomu řešení $x = y = 5$, $z = 2$. Co kdybychom upravili nerovnost

$$\begin{aligned} 0 &\le (x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 \\ &= (x^2+y^2+z^2) - 10(x+y) - 4z + (25+25+4) \\ &= (x^2+y^2+z^2) - 10(x+y+z) + 6z + 54. \end{aligned}$$

Dosadíme-li ze zadání, dostaneme

$$6z \ge 10(x+y+z) - (x^2+y^2+z^2) - 54 = 120 - 54 - 54 = 12,$$

tedy $z \ge 2$. Sečteme-li nerovnosti

$$\begin{aligned} 4 &\le z^2, \\ 4xy &\le x^2+y^2, \end{aligned}$$

dostaneme $4 + 4xy \le x^2+y^2+z^2 = 54$, odtud $2xy \le 50$, $xy \le 25$.

(c) Některé z čísel x, y, z je nejvýše 3 Sporopředpoklad je $x > 3$, $y > 3$, $z > 3$. Naivní přístup dívá odhad

$$x+y+z > 9, \quad x^2+y^2+z^2 > 27, \quad xy+yz+zx > 27,$$

z kterého žádný spor nekyne. Označme $a = x - 3$, $b = y - 3$. Potom

$$x = a + 3, \quad y = b + 3, \quad z = 12 - x - y = 6 - a - b.$$

Dosazením do rovnosti $x^2 + y^2 + z^2 = 54$ dostaneme

$$\begin{aligned} 54 &= (a+3)^2 + (b+3)^2 + (6-a-b)^2 \\ &= a^2 + 6a + 9 + b^2 + 6b + 9 + 36 + a^2 + b^2 - 12a - 12b + 2ab \\ &= 2a^2 + 2b^2 - 12a - 12b + 2ab + 54. \end{aligned}$$

Zatím jsme označili $a = x - 3$, $b = y - 3$ a dospěli jsme k rovnosti

$$54 = 2a^2 + 2b^2 - 6a - 6b + 2ab + 54,$$

po úpravě

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + ab - 3a - 3b &= 0, \\ (a+b)^2 - 3a - 3b &= ab, \\ (a+b)(a+b-3) &= ab. \end{aligned}$$

Předpokládejme, že $x > 3$, $y > 3$. Potom $a, b > 0$, $a + b > 0$, $ab > 0$, tedy též $a + b - 3 > 0$, ale $a + b - 3 = 3 - z$, tedy $z < 3$. Dokázali jsme , že alespoň jedno z čísel x, y, z je ≤ 3.

(d) Některé z čísel x, y, z je alespoň 5. Tentokrát označme $a = 5 - x$, $b = 5 - y$. Potom

$$x = 5 - a, \quad y = 5 - b, \quad z = a + b + 2.$$

Dosazením do rovnosti $x^2 + y^2 + z^2 = 54$ dostaneme podobně jako v předchozím

$$(a+b)(a+b-3) = ab,$$

a předpoklad $x < 5$, $y < 5$ dává $a, b > 0$, $a+b > 3$. To však znamená $z = a+b+2 > 5$. Dostali jsme, že některé z čísel x, y, z je alespoň 5.

Příklad 6. $x^3 + y^3 = 3xy$, jakých hodnot může nabývat $x + y$?

Řešení. Hledáme, pro která p existuje řešení soustavy

$$\begin{aligned} x + y &= p \\ x^3 + y^3 &= 3xy. \end{aligned}$$

Nahradíme-li v druhé rovnici y výrazem $p - x$, dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 + (p-x)^3 - 3x(p-x) \\ &= x^3 + p^3 - 3p^2x + 3px^2 - x^3 - 3xp + 3x^2 \\ &= 3(p+1)x^2 - 3p(p+1)x + p^3. \end{aligned}$$

Soustava

$$\begin{aligned} x + y &= p \\ 3(p+1)x^2 - 3p(p+1)x + p^3 &= 0 \end{aligned}$$

je ekvivalentní s původní. První rovnice nedělá problém. Pokud $p = -1$, druhá rovnice nemůže být splněna. Pokud $p \neq -1$, druhá rovnice je kvadratická a má řešení, právě když její diskriminant D je nezáporný. Je

$$\begin{aligned} D &= 9p^2(p+1)^2 - 12(p+1)p^3 = (p+1)(9p^3 + 9p^2 - 12p^3) \\ &= 3p^2(p+1)(3-p). \end{aligned}$$

Vidíme, že $D \geq 0 \iff -1 \leq p \leq 3$. Podmínka $-1 < p \leq 3$ je nutná a postačující pro řešitelnost naší soustavy.

Příklad 7. Najděte všechna řešení soustavy $a^2 + b^2 + c^2 = 26$, $a + b = 5$, $b + c \geq 7$.

Řešení. Nejprve se budeme zabývat rovnicí, tedy případem $b+c=7$. Potom

$$\begin{aligned} a &= 5-b, \\ c &= 7-b, \\ 26 &= a^2+b^2+c^2 = (5-b)^2+b^2+(7-b)^2 \\ &= b^2-10b+25+b^2+b^2-14b+49 = 3b^2-24b+74, \\ 0 &= 3b^2-24b+48 = 3(b^2-8b+16) = 3(b-4)^2. \end{aligned}$$

Odtud

$$b=4, \quad a=1, \quad c=3.$$

Vyšlo nám

$$0=(a-1)^2+(b-4)^2+(c-3)^2. \tag{1}$$

Nyní se budeme zabývat nerovnicí. V tom případě místo (1) máme jen nerovnost, v níž rovnost nastává, když $b+c=7$. Totiž

$$\begin{aligned} 0 &\le (a-1)^2+(b-4)^2+(c-3)^2 \\ &= a^2-2a+1+b^2-8b+16+c^2-6c+9 \\ &= (a^2+b^2+c^2)-2(a+b)-6(b+c)+26. \end{aligned}$$

Ze zadání dosadíme

$$a^2+b^2+c^2=26, \quad a+b=5$$

a dostaneme

$$\begin{aligned} 6(b+c) &\le (a^2+b^2+c^2)-2(a+b)+26 = 26-10+26 = 42, \\ b+c &\le 7. \end{aligned}$$

Odvodili jsme $b+c\le 7$. Ale ze zadání je $b+c\ge 7$. Dohromady $b+c=7$, ale v tom případě už víme odpověď:

$$b=4, \quad a=1, \quad c=3.$$

Příklad 8. Nechť $a,b,c,d>0$,

$$ab+cd=4, \quad ac+bd=4, \quad ad+bc=5.$$

Najděte nejmenší možnou hodnotu součtu $a+b+c+d$ a zjistěte, které čtveřice (a,b,c,d) ji dosahují.

Řešení. Máme

$$\begin{aligned} (a+b+c+d)^2 &= (a-d)^2+(b-c)^2+4(ad+bc)+2(ab+cd)+2(ac+bd) \\ &\ge 4(ad+bc)+2(ab+cd)+2(ac+bd) = 20+8+8 = 36, \end{aligned}$$

tedy (jsme v kladných číslech) $a+b+c+d\ge 6$. Rovnost nastává, právě když $a=d$ a $b=c$. Ze zadání pak

$$2ab=4, \qquad a^2+b^2=5.$$

Odtud $(a+b)^2=9$, $(a-b)^2=1$. Jelikož $a,b>0$, máme $a+b=3$ a $a-b=\pm1$. Řešení jsou (ověřeno zkouškou!)

$$(a,b,c,d)=(2,1,1,2), \qquad (a,b,c,d)=(1,2,2,1).$$