REKURENTNÍ POSLOUPNOSTI

JAN MALÝ
UK V PRAZE A UJEP V ÚSTÍ N. L.

Posloupnost může být zadána

- vzorcem pro n-tý člen,
- neúplným výčtem,
- rekurentně

Vzorec pro n-tý člen – co to je?
Je nutné dohodnout jazyk a pravidla hry.
Návrh: povolené

- konstanty (třeba π),
- arimetické operace
- mocniny
- elementární funkce (exp, ln, sin, cos, arctan)
- "vidličky"

Termín vidličky je zde použit pro zadání s rozlišení více možností, např.

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \text{ liché}, \\ 0, & n \text{ sudé}. \end{cases}$$

Co není povoleno je zakázáno.
Např. operace s neomezeným nebo nekonečným počtem operandů.
Ale jindy se můžeme dohodnout, že to povolíme.

Zadání neúplným výčtem je možno použít pouze u jasných případů na základě úmluvy, že nejde o záludnost, např. posloupnost $x_n = n(n+1)$ lze zapsat

$$1 \cdot 2,\ 2 \cdot 3,\ 3 \cdot 4, \dots$$

Ale nikdo nemíní vážně, že by neúplným výčtem byla posloupnost jednoznačně určena.

Příklad 1. Meteorologové měřili každý den maximální teplotu

Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek
$1°$	$2°$	$3°$	$4°$	$5°$

Kolik bude maximální teplota v sobotu?

Příklad 2. Na kolik oblastí rozdělí kruh spojnice n bodů na kružnici?

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\quad ,\quad ,\quad ,\quad ,\ 256, \dots$$

Zdálo by se, že jde o posloupnost 2^{n-1}. Avšak doplníme-li zatím vynechané hodnoty, dostaneme

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 31,\ 57,\ 99,\ 163,\ 256, \dots$$

Je na to dokonce vzorec

$$x_n = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24) = \sum_{k=0}^{4} \binom{n-1}{k}.$$

Nápověda 256 byl chyták, skutečná posloupnost 2^{n-1} dospěje k této hodnotě o jedno místo dřív.

Rekurentní zadání posloupnosti vyžaduje

- vlastní rekurentní vztah, vzorec na výpočet n-tého členu z předchozích
- stanovení počáteční hodnoty / počátečních hodnot

Někdy se podaří najít vzorec pro n-tý člen, někdy ne.
Často se rekurentní vztah zadává ve tvaru $x_{n+1} = f(x_n)$, nebo třeba $x_{n+2} = f(x_n, x_{n+1})$.

Příklad 3.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + 1 \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

Vede na $x_n = n$.

Příklad 4.

$$\begin{cases} x_{n+1} = qx_n \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Vede na $x_n = q^n$.

Příklad 5.

$$\begin{cases} x_{n+1} = (n+1)x_n, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

$x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1 \cdot 2$, $x_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \dots$
To je přece $n!$.
Máme tedy zase vzorec pro n-tý člen.
Ale ouha, symbol ! nebyl v domluvené abecedě, takže je zakázaný.

Příklad 6.

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{n} \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

$x_2 = 1$, $x_3 = 1 + \frac{1}{2}$, $x_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $\dots$

I tentokrát máme nepovolený vzorec

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}.$$

Příklad 7. Rekurentní zadání může vypadat i takhle:

$$\begin{cases} x_n = x_1 + \cdots + x_{n-1} \\ x_1 = 1. \end{cases}$$

K výpočtu n-tého členu potřebujeme znát všechny předchozí.
Sami si odvoďte, co je to za posloupnost.

Důkaz matematickou indukcí.
Tato důkazová metoda se hodí, chceme-li dokázat platnost nějakého vzorce V pro všechna přirozená čísla.
To se dělá následovně.
V 1. kroku dokážeme platnost vzorce V pro $n = 1$.

V 2. kroku dokážeme, že platí-li V pro nějaké n, pak platí také pro $n+1$.
Pokud se oba kroky podaří, pak je platnost V dokázána pro všechna přirozená čísla.

Fibonacciho posloupnost.
Posloupnost f_n Fibonacciho čísel je dána rekurentním předpisem

$$\begin{cases} f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \\ f_0 = 0, \\ f_1 = 1. \end{cases}$$

Všimněme si, že aby posloupnost byla určena touto rekurentní formulí, je třeba zadat dvě počáteční hodnoty.
Posloupnost pokračuje

$$f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3,\ f_5 = 5,\ f_6 = 8,\ \ldots.$$

Tzv. Binetova formule praví

$$f_n = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Při dosazení se odmocniny jaksi vytratí.
Tuto formuli lze odvodit. Hledáme posloupnosti, které splňují

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n,$$

zatím bez počátečních podmínek. Co kdybychom našli takovou posloupnost ve tvaru $x_n = \rho^n$? Pak by ρ splňovalo rovnici

$$\rho^{n+2} = \rho^{n+1} + \rho^n,$$

po vykrácení

$$\rho^2 = \rho + 1.$$

Řešením této kvadratické rovnice je

$$\rho_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Je vidět, že platí obecnější tvrzení:
Jestliže y a z řeší kvadratickou rovnici

$$x^2 = px + q$$

a a, b jsou reálná čísla, potom posloupnost

$$x_n = ay^n + bz^n$$

splňuje rekurentní vztah

$$x_{n+2} = px_{n+1} + qx_n.$$

(Více teorie tzv. diferenčních rovnic, kde neznámé jsou posloupnosti.)
Pro Fibonacciho posloupnost máme $p = q = 1$. Použijme

$$y = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$z = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Máme

$$f_0 = 0 = ay^0 + bz^0 = a + b,$$

$$f_1 = 1 = ay^1 + bz^1 = \frac{1}{2}(a + \sqrt{5}a + b - \sqrt{5}b).$$

Z první rovnice dostaneme $b=-a$, dosazením do druhé rovnice

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{5}a+\tfrac{1}{2}\sqrt{5}a=1,$$

tedy

$$a=\frac{1}{\sqrt{5}},\quad b=-\frac{1}{\sqrt{5}},$$

celkem

$$f_n=\tfrac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n-\Big(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big].$$

Na podobné diferenční rovnice vedou různé slovní úlohy, například o množení králíků. (Představujte si, že králičí samice má potomky ve dvou generacích).

Příklad 8. Buď p_n počet všech n-místných čísel, v jejichž dekadickém zápise se nevyskytují vedle sebe dvě nuly. Najděte diferenční rovnici pro p_n.

Řešení. Buď x_n počet čísel požadované vlastnosti, které končí na 0, a y_n počet čísel požadované vlastnosti, které nekončí na 0. Potom

$$y_{n+1}=9p_n$$
$$x_{n+1}=y_n.$$

Po sečtení

$$p_{n+1}=9p_n+y_n.$$

Dosadíme $y_n=9p_{n-1}$, dostaneme

$$p_{n+1}=9p_n+9p_{n-1}.$$

Počáteční podmínky jsou $p_1=9$, $p_2=90$. □

Příklad 9. Pro Fibonacciho posloupnost $\{f_n\}$ dokažte vztah

$$f_1^2+\dots+f_n^2=f_nf_{n+1}.$$

Řešení. Indukcí. 1. krok

$$f_1=1=1\cdot 1=f_1f_2.$$

2. krok: Předpokládejme, že vzorec platí pro n. Potom

$$f_1^2+\dots+f_n^2+f_{n+1}^2=f_nf_{n+1}+f_{n+1}^2=f_{n+1}(f_n+f_{n+1})=f_{n+1}f_{n+2},$$

tedy vzorec platí pro $n+1$. □

Příklad 10. Nechť posloupnost $\{x_n\}_n$ je dána rekurentně

$$\begin{cases} x_{n+1}=1+\dfrac{1}{x_n},\\ x_1=1.\end{cases}$$

Potom pro všechna přirozená n je $x_n=\frac{f_{n+1}}{f_n}$, kde $\{f_n\}_n$ je Fibonacciho posloupnost.

Řešení. $x_1=1$, $x_2=1+\frac{1}{1}$, $x_3=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}$, $x_3=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}$,

po dosazení $x_1=\frac{1}{1}$, $x_2=\frac{2}{1}$, $x_3=\frac{3}{2}$, $x_4=\frac{5}{3}$, $x_5=\frac{8}{5}$, ...

Důkaz provedeme indukcí.

1. krok: $x_1=1=\frac{1}{1}=\frac{f_2}{f_1}$.

2. krok: Nechť vzorec platí pro n. Potom

$$x_{n+1}=1+\frac{1}{x_n}=1+\frac{1}{\frac{f_{n+1}}{f_n}}=1+\frac{f_n}{f_{n+1}}=\frac{f_n+f_{n+1}}{f_{n+1}}=\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}.$$

Tedy vzorec platí i pro $n+1$ a indukční krok je ověřen. □

Odvození posloupnost pro výpočet odmocniny. Uvažujme posloupnost

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n^2, \\ z_0 = z. \end{cases}$$

Pro $|z| > 1$ jde do nekonečna.
Pro $|z| < 1$ jde velmi rychle k nule.
Pro $|z| = 1$ je $z_2 = z_3 = \cdots = 1$.
Mějme $a > 0$. Provedeme li substituci $z_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}$, posloupnost x_n půjde zběsile rychle k $\sqrt{a}$.Potíž je, že abychom spočítali odmocninu z a, musíme znát odmocninu z a.
NEBO NE???
Počítejme.

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1} - \sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} &= \Big(\frac{x_n - \sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}\Big)^2. \\
1 - \frac{2\sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} &= \Big(1 - \frac{2\sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}}\Big)^2 = 1 - \frac{4\sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} + \frac{4a}{(x_n + \sqrt{a})^2}. \\
\frac{2\sqrt{a}}{x_{n+1} + \sqrt{a}} &= \frac{4\sqrt{a}}{x_n + \sqrt{a}} - \frac{4a}{(x_n + \sqrt{a})^2} = \frac{4x_n\sqrt{a} + 4a - 4a}{x_n^2 + 2x_n\sqrt{a} + a}. \\
\frac{x_{n+1} + \sqrt{a}}{2\sqrt{a}} &= \frac{x_n^2 + 2x_n\sqrt{a} + a}{4x_n\sqrt{a}}. \\
x_{n+1} &= \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big).
\end{aligned}$$

Hle, odmocniny se vytratily. Dostali jsme účinnou metodu, jak počítat odmocninu z a. Samozřejmě metoda dá pouze přibližný výsledek (s libovolnou přesností), ale co je to přesný výsledek v takovém případě?

Příklad 11. Dáno $a > 1$. Nechť posloupnost $\{x_n\}_n$ je jako výše dána rekurentně

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big), \\ x_0 = x \neq 0 \end{cases}$$

1. Pro která x je posloupnost konstantní?
2. Je-li $x > \sqrt{a}$, pak pro všechna n je $x_n > x_{n+1} > \sqrt{a}$.
3. Najděte vzorec pro x_n, je-li $x = a$.

Řešení. 1. Jestliže posloupnost je konstantně x, musí platit

$$x = \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big)$$

po úpravě $\frac{x}{2} = \frac{a}{2x}$, neboli $x^2 = a$.
Číslo x tedy musí být $\sqrt{a}$ nebo $-\sqrt{a}$. Zkouška ověří, že obě hodnoty vyhovují.

2. Chceme dokázat: Pro všechna přirozená n je $x_n > \sqrt{a}$.
Tvrzení dokážeme indukcí.
1. krok: $x_0 > \sqrt{a}$ podle předpokladu.
2. krok: Předpokládejme, že $x_n > \sqrt{a}$. Pak

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big)^2 = a + \frac{1}{4}\Big(x_n - \frac{a}{x_n}\Big)^2 > a.$$

Jelikož $x_n > 0$, je i $x_{n+1} > 0$ a nerovnost můžeme odmocnit na $x_{n+1} > \sqrt{a}$. Z indukčního předpokladu jsme vlastně zatím využili jen $x_n^2 \neq a$ a $x_n > 0$, totiž i $x_1 \in (0, \sqrt{a})$ hodí $x_2 > \sqrt{a}$.

Nyní chceme dokázat ještě $x_{n+1} < x_n$. Víme, že $x_n > \sqrt{a}$. Počítejme

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big) = \frac{1}{2}x_n\Big(1 + \frac{a}{x_n^2}\Big) < \frac{1}{2}x_n\Big(1+1\Big) = x_n.$$

3. Označme $z = \frac{a-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}$. Připomeňme, že substituce $z_n = \frac{x_n-\sqrt{a}}{x_n+\sqrt{a}}$ vede na

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n^2, \\ z_0 = z. \end{cases}$$

Snadno spočítáme (a indukcí formálně ověříme)

$$z_n = z^{2^n}.$$

Zpětná substituce je

$$x_n = \sqrt{a}\,\frac{1+z_n}{1-z_n}$$

Tedy

$$x_n = \sqrt{a}\,\frac{1+z^{2^n}}{1-z^{2^n}} = \sqrt{a}\,\frac{1+\left(\frac{a-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}\right)^{2^n}}{1-\left(\frac{a-\sqrt{a}}{a+\sqrt{a}}\right)^{2^n}}$$

□

Poznámka 1. Popis posloupnosti jsme "zjednodušili" na vzorec, který je ovšem pro výpočet $\sqrt{a}$ nepoužitelný. Sen o tom, že nalezení vzorce pro n-tý člen nám usnadní výpočet odmocniny, se rozplynul.

Příklad 12. Nechť posloupnost $\{x_n\}_n$ je dána rekurentně

$$\begin{cases} x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}, \\ x_1 = x. \end{cases}$$

1. Pro která x je posloupnost konstantní?
2. Je-li $0 \le x < 2$, pak pro všechna n je $0 \le x_n < x_{n+1} < 2$.
3. Najděte vzorec pro x_n, je-li $x = 0$.

Řešení. 1. Jestliže posloupnost je konstantně x, musí platit

$$x = \sqrt{2+x},$$

po úpravě $x^2 = 2 + x$, neboli $(x-2)(x+1) = 0$.
Číslo x tedy musí být 2 nebo -1. Provedeme-li zkoušku, vypadne možnost $x = -1$, protože odmocnina musí být kladná. Jediné řešení je $x = 2$.

2.
Indukcí dokážeme, že pro všechna přirozená n je $0 \le x_n < 2$.
1. krok: $0 \le x_1 < 2$ je jasné.
2. krok: $0 \le x_n < 2$, pak $0 \le \sqrt{2+x_n} < \sqrt{2+2} = 2$.
Nyní dokážeme $x_{n+1} > x_n$. Jelikož $0 \le x_n < 2$, je $(x_n+1)(2-x_n) > 0$, tedy

$$x_{n+1} = \sqrt{2+x_n} = \sqrt{x_n^2 + (x_n+1)(2-x_n)} > \sqrt{x_n^2} = x_n.$$

3. Máme
$x_2 = \sqrt{2}$, $x_3 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, $x_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $x_5 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, ...
Indukcí dokážeme $x_n = 2\cos 2^{-n}\pi$. (Neptejte se, jak jsme na to přišli.)
1. krok: $x_1 = 0 = \cos(\pi/2)$.
2. krok: Označme $\alpha = 2^{-n-1}\pi$. Předpokládejme, že $x_n = 2\cos 2^{-n}\pi$. Potom

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 &= 2 + x_n = 2 + 2\cos 2^{-n}\pi = 2(1+\cos 2\alpha) \\ &= 2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 4\cos^2\alpha = 4\cos^2(2^{-n-1}\pi), \end{aligned}$$

po odmocnění
$$x_{n+1} = 2\cos^2(2^{-n-1}\pi).$$
Indukční předpoklad je ověřen, tvrzení platí. □

Poznámka 2. V matematické analýze se dokazuje $|x - \sin x| < \frac{|x|^3}{6}$, $x \neq 0$.
Tedy
$$|\pi - 2^n \sin(2^{-n}\pi)| = 2^n |2^{-n}\pi - \sin(2^{-n}\pi)| < 2^n \frac{2^{-3n}\pi^3}{6} < 2^{3-2n}.$$
Číslo $2^n \sin(2^{-n}\pi)$ se dá vypočítat z odmocnin, neboť
$$\sin(2^{-n}\pi) = \sqrt{1 - \cos^2(2^{-n}\pi)} = \sqrt{1 - \tfrac{1}{4}x_n^2}.$$
Našli jsme metodu, jak počítat π s libovolnou přesností, umíme-li počítat odmocniny s libovolnou přesností.

Posloupnost s chaotickým chováním. V předchozím jsme počítali rekurentně posloupnost $\cos 2^{-n}x$. Co kdybychom obrátili běh času a počítali $\cos 2^n x$?
Geometricky: zdvojnásobujeme úhel a sledujeme x-ovou souřadnici na jednotkové kružnici.

Podle vzorce $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ je posloupnost $x_n = \cos 2^n x$ je daná rekurentním předpisem
$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n^2 - 1 \\ x_0 = x. \end{cases}$$
Tato posloupnost vykazuje chaotické chování.
To znamená, že ať známe vstupní data s libovolnou přesností, vždy existuje okamžik, od kterého nemáme kontrolu nad chováním x_n, tj. nedovedem ho odhadnout ani přibližně.
Pro ilustraci uvažujme příbuznou posloupnost
$$\begin{cases} x_{n+1} = 10x - [10x], \\ x_0 = x, \end{cases}$$
kde $[y]$ značí celou část čísla y.

Např.
$$\begin{aligned} x_0 &= 0,253545453584777\ldots, \\ x_1 &= 0,535454535847771\ldots, \\ x_2 &= 0,354545358477719\ldots, \end{aligned}$$
atd.

Pokud neznáme výchozí x absolutně přesně, nevíme, jak se posloupnost bude vyvíjet pro velká n. Všechny cifry, co jsme ze začátku znali, budou postupem času smazány a objeví se úplně nové.

A takhle se chová počasí, proto je tak těžké ho předpovídat.

Poznámka 3. Uvažujme posloupnost dvojic (x_n, y_n), danou rekurentně
$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n). \end{aligned}$$
Často pozorujeme následující chování: Pro některé (“hodné”) počáteční hodnoty je posloupnost přitahována bodem nebo k-ticí bodů (které pravidelně střídá), pro některé uteče “do nekonečna” a pro hraniční počáteční hodnoty vykazuje chaotické

chování. Podaří-li se nám na počítači vykreslit množinu hodných počátečních hodnot, dostaneme zajímavý fraktální tvar. Více informací, včetně návodu pro hraní na počítači, na Wikipedii pod heslem "Julia sets".