Rekurentní nerovnosti

Jan Malý
UK v Praze a UJEP v Ústí n. L.
LŠMF Janov na Nisou, srpen 2011

Cílem přednášky je ukázat využití metod matematické indukce na přešení příkladů o nerovnostech pro posloupnosti zadané nebo omezené rekurentním předpisem. Odhady často dávají užitečnou informaci o členech posloupnosti, jejichž explicitní vyjádření nelze získat.

Příklad 1. Ačkoli přednáška je věnována nerovnostem, pro začátek si ukažme příklad, kde lze dokázat rovnost. Posloupnost

$$\begin{aligned} &y_0 = 0,\ y_1 = 1,\\ &y_{n+2} = y_{n+1} + y_n, \qquad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

je tzv. Fibonacciho posloupnost $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$. Explicitní vzorec pro n-tý člen (tzv. Binetův vzorec) se dá těžko uhodnout bez znalostí teorie diferenčních rovnic:

$$V(n): \quad y_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big].$$

Ale když už víme, co máme dokazovat, snadno zvládneme indukcí. Ověření $V(0)$, $V(1)$ ponechme jako cvičení. Předpokládáme $V(n)$ a $V(n{+}1)$, ověřujeme $V(n{+}2)$. Uvědomme si, že dokazovaný vzorec má tvar $y_n = c\,b^n - c\,a^n$, kde b i a řeší $1+x = x^2$. Máme

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= y_{n+1} + y_n = c\,b^{n+1} - c\,a^{n+1} + c\,b^n - c\,a^n\\ &= c\,b^n(b+1) - c\,a^n(a+1) = c\,b^n b^2 - c\,a^n a^2 = c\,b^{n+2} + c\,a^{n+2}, \end{aligned}$$

což je $V(n{+}2)$.

Poznámka 1. Jak by to vypadalo s nerovností? Mějme zadáno $z_0 \le 0$, $z_1 \le 1$, $z_{n+2} \le z_{n+1} + z_n$.Pak indukcí snadno dokážeme $z_n \le y_n$, kde y_n je jako výše Fibonacciho posloupnost. Vskutku,

$$z_0 \le y_0,\ z_1 \le y_1, \quad z_{n+2} \le z_{n+1} + z_n \le y_{n+1} + y_n = y_{n+2}.$$

Je to vždy tak jednoduché?

Úloha 1. Nechť daná posloupnost splňuje

$$\begin{aligned} &y_0 = 0,\ y_1 = 1,\\ &0 \le y_{n+2} \le 2y_{n+1} - y_n, \qquad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $V(n):\ x_n \le n$.

Řešení. Jelikož jeden člen je záporný, primitivní indukce nepomáhá. Nejprve dokážeme (indukcí) pomocný odhad $W(n):\ y_{n+1} \le y_n + 1$. $W(0)$ platí, z indukčního předpokladu $W(n)$ dostaneme

$$y_{n+2} \le 2y_{n+1} - y_n = y_{n+1} + y_{n+1} - y_n \le y_{n+1} + y_n + 1 - y_n = y_{n+1} + 1,$$

což je $W(n{+}1)$. Nyní již jsme vybaveni na požadovanou nerovnost, opět indukcí, $V(0)$, $V(1)$ platí, z indukčního předpokladu $V(n+1)$ a tvrzení $W(n)$ dostaneme pro $n \ge 0$

$$y_{n+2} \le y_{n+1} + y_{n+1} - y_n \le n + 1 + y_n + 1 - y_n = n + 2,$$

tedy $V(n{+}2)$. $\square$

Úloha 2. Nechť daná posloupnost splňuje

$$y_0 = 2,\ 0 \le y_1 \le 2,$$
$$0 \le y_{n+2} \le -y_{n+1} + 2y_n, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $y_n < 3$.

Řešení. Předpokládejme pro spor, že $y_k \ge 3$. Pak podle předpokladů $k \ge 2$. Zpětnou indukcí dokážeme $V(n):\ \ y_n \ge 2 + (-2)^{n-k}$ pro $0 \le n \le k{+}1$. Máme ze zadání

$$V(k{+}1):\ y_{k+1} \ge 0 = 2 + (-2)^{(k+1)-k}$$

a ze sporopředpokladu

$$V(k):\ y_k \ge 3 = 2 + (-2)^{k-k}.$$

Pro $n < k$, platí-li $V(n+2)$ a $V(n+1)$, dostáváme z předpokladů

$$\begin{aligned} y_n &\ge \frac{1}{2}(y_{n+1} + y_{n+2}) \ge \frac{1}{2}\Big(2 + (-2)^{n+2-k} + 2 + (-2)^{n+1-k}\Big) \\ &= 2 + (-2)^{n-k}\frac{1}{2}\Big((-2)^2 + (-2)^1\Big) = 2 + (-2)^{n-k}, \end{aligned}$$

což je $V(n)$. Speciálně pro $n = 1, 0$ dostáváme $y_1 \ge 2 + (-2)^{1-k}$, $y_0 \ge 2 + (-2)^{-k}$, což je spor, neboť obě čísla měla být ≤ 2. □

Cvičení 1. Pro stejnou posloupnost dokažte, že ze dvou po sobě jdoucích členů je vždy aspoň jeden ≤ 2.

Cvičení 2. Pro stejnou posloupnost dokažte: ze dvou po sobě jdoucích členů y_n, y_{n+1}, kde $n \ge k \ge 0$, je vždy aspoň jeden $\le y_k$.

Cvičení 3. Pro stejnou posloupnost dokažte, že existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n \ge k$ je $y_n \le 2$.

Cvičení 4.

$$y_0 = 1,\ y_1 = 2,$$
$$0 \le y_{n+2} \le -y_{n+1} + 6y_n, \qquad n = 0, 1, \dots$$

Dokažte, že existuje $k > 2011$ tak, že $y_k \le 2^k$.

Úloha 3. Dokažte

(1) $$V(n):\ n! \ge e\Big(\frac{n}{e}\Big)^n, \qquad n \ge 1.$$

Připomeňme: $\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \le e$.

Řešení. Posloupnost $y_n = n!$ je definovaná rekurentní formulí $y_1 = 1$, $y_{n+1} = (n+1)\, y_n$. Zřejmě $V(1)$. Nechť $V(n)$. Potom

$$\begin{aligned} (n+1)! &\ge (n+1)\, n! \ge (n+1)\, e\left(\frac{n}{e}\right)^n \ge (n+1)\Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n\Big(\frac{n}{e}\Big)^n \\ &= (n+1)\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n\Big(\frac{n}{e}\Big)^n = (n+1)\Big(\frac{n+1}{e}\Big)^n = e\Big(\frac{n+1}{e}\Big)^{n+1}, \end{aligned}$$

což je $V(n+1)$. □

Cvičení 5. Dokažte

(2) $$n! \le e^2\Big(\frac{n}{e}\Big)^{n+1} \qquad n \ge 1.$$

Poznámka 2. Ještě přesnější odhady než (1) a (2) poskytuje tzv. Stirlingův vzorec, jeho důkaz je však dost těžký.

Úloha 4. Dokažte

$$V(n): \ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \le 1+\ln n, \qquad n\ge 1. \tag{3}$$

Pomocné odhady: Vyjdeme z nerovnosti

$$\ln x \le x-1, \qquad x>0.$$

Nechť $n\ge 1$. Dosazením $x=\frac{n+1}{n}$ dostaneme

$$\ln(n+1)-\ln n = \ln\frac{n+1}{n} \le \frac{1}{n}.$$

Dosazením $x=\frac{n}{n+1}$ dostaneme

$$\ln(n+1)-\ln n = \ln\frac{n+1}{n} = -\ln\frac{n}{n+1} \ge -\Big(\frac{n}{n+1}-1\Big) = \frac{1}{n+1}.$$

Řešení úlohy 4. Označme $y_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$. Potom y_n splňuje rekurentní vztah

$$\begin{aligned} y_1 &= 1,\\ y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{n+1}, \qquad n=1,2,\ldots. \end{aligned}$$

Zřejmě $V(1)$. Předpokládejme $V(n)$, potom

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{n+1} \le 1+\ln n + \frac{1}{n+1} \le 1+\ln n + (\ln(n+1)-\ln n)\\ &= 1+\ln(n+1), \end{aligned}$$

což je $V(n+1)$. $\square$

Cvičení 6. Dokažte

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1} \ge \ln n, \qquad n\ge 2. \tag{4}$$

Poznámka 3. Nerovnosti (3) a (4) souvisí s tzv. Eulerovou konstantou $\gamma = 0.57721\ldots$. (Neplést s Eulerovým číslem $e=2.71828\ldots$!)

Úloha 5. Nechť

$$\begin{aligned} x_0 &= 2\\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{2}{x_n}\Big), \qquad n=0,1,2,\ldots. \end{aligned} \tag{5}$$

Potom

$$V(n): \ \sqrt{2} < x_n \le \sqrt{2+8\cdot 4^{-2^n}}, \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

Řešení. Umocníme-li zadanou rovnost na druhou, dostaneme

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\Big(x_n^2 + 4 + \frac{4}{x_n^2}\Big).$$

Od obou stran odečteme 2, pak

$$x_{n+1}^2 - 2 = \frac{1}{4}\Big(x_n^2 - 4 + \frac{4}{x_n^2}\Big) = \frac{x_n^4 - 4x_n^2 + 4}{4x_n^2} = \frac{(x_n^2-2)^2}{4x_n^2}.$$

Označme $y_n = x_n^2 - 2$. Potom $y_0 = 2$ a

$$y_{n+1} = \frac{y_n^2}{4(2+y_n)} \le \frac{y_n^2}{8}.$$

Jelikož všechna x_n jsou zřejmě kladná, $V(n)$ je ekvivalentní nerovnosti

$$W(n): \ 0 \le y_n \le 8\cdot 4^{-2^n}.$$

Zřejmě $W(0)$. Předpokládejme $W(n)$. Potom

$$y_{n+1} \leq \frac{1}{8}\, y_n^2 \leq \frac{1}{8}\big(8 \cdot 4^{-2^n}\big)^2 = \frac{1}{8} \cdot 8^2 \cdot 4^{-2^n \cdot 2} = 8 \cdot 4^{-2^{n+1}},$$

což je těžší část $W(n{+}1)$. Nerovnost $y_n > 0$ ponecháme do následujícího cvičení. □

Cvičení 7. Dokažte druhou část nerovnosti, tj. $x_n > \sqrt{2}$.

Poznámka 4. Předchozí úloha má značný teoretický význam. Ukazuje, že členy posloupnosti (5) se velmi rychle blíží číslu $\sqrt{2}$ a poskytují tudíž možnost, jak přibližně spočítat tuto odmocninu. Obdobným postupem se dá počítat odmocnina z každého kladného čísla.

Úloha 6.

$$x_0 = 1,$$
$$x_{n+1} = \sin x_n, \quad n = 0, 1, \ldots,$$

ukažte, že $V(n):\ x_n \leq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+n}}$.

Pomocné nerovnosti

$$x - \sin x \geq sin\frac{x}{2}\,(1 - \cos\frac{x}{2}) \geq \sin^3\frac{x}{2}, \qquad 0 \leq x \leq 1$$

a

$$0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} \implies \frac{\sin\alpha}{\alpha} \geq \frac{\sin\beta}{\beta}$$

se dají tušit z geometrických úvah. Přesný důkaz lze provést ze znalostí základů matematické analýzy. Speciálně pro $0 < x < 1$ máme $\sin\frac{x}{2} \geq x \sin\frac{1}{2} \geq \frac{x}{\sqrt[3]{10}}$, tedy $\sin x \leq x - \frac{x^3}{10}$. (Nerovnost se dá dostat i s lepší konstantou).

Řešení úlohy 6. Na požadovaný odhad jdeme indukcí.
Zřejmě $V(0)$. Dokážeme indukční krok $V(n) \implies V(n{+}1)$. Označme $k = 5 + n$. Potom

$$\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} \leq \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$$
$$= \frac{1}{k(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})} \leq \frac{1}{2(\sqrt{k})^3},$$

neboli

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+n}} - \frac{1}{10}\Big(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+n}}\Big)^3 = \sqrt{5}\Big(\frac{1}{\sqrt{5+n}} - \frac{1}{2(\sqrt{5+n})^3}\Big) \leq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+n+1}}.$$

Tedy

$$x_{n+1} \leq \sin x_n \leq \sin\Big(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+n}}\Big) \leq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+n}} - \frac{1}{10}\Big(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+n}}\Big)^3 \leq \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+n+1}}.$$

□