DĚLITELNOST

KRÁCENÍ ZLOMKŮ A ŠOUPÁNÍ MINCÍ

JAN MALÝ

Soutěžní úloha 1. *Na tabuli jsou napsána čísla 1, 2, ..., 33. V jednom kroku zvolíme na tabuli dvě čísla, z nichž jedno je dělitelem druhého, obě smažeme a na tabuli napíšeme jejich (celočíselný) podíl. Takto pokračujeme, až na tabuli zůstanou jen čísla, z nichž žádné není dělitelem jiného. (V jednom kroku můžeme smazat i dvě stejná čísla a nahradit je číslem 1.) Kolik nejméně čísel může na tabuli zůstat?*

Zadání si můžeme představit i takto: Ve jmenovateli zlomku jsou čísla $1, 2, \dots, 33$, ve jmenovateli je jen jednotka. V jednom kroku přesuneme jedno z čísel z čitatele do jmenovatele tak, aby po vykrácení opět zbyla ve jmenovateli jen jednotka...

Úloha 1. *Určete, kolika nulami končí dekadický zápis čísla 33!.*

Důkaz. Sedmi nulami. Stačí zjistit, s jakými exponenty vystupují prvočísla 2 a 5 v rozkladu daného faktoriálu na prvočinitele. Lze to provést konkrétním rozborem součinu $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 33$.

Úloha 2. *Dokažte, že číslo* $N = 46! \cdot 47! \cdot 48! \cdot 49!$ *není druhou mocninou celého čísla, a pak najděte jeho největší dělitel, který je druhou mocninou celého čísla.*

Důkaz. Číslo N není druhou mocninou, protože v jeho rozkladu na prvočinitele vystupuje prvočíslo 47 s lichým exponentem.

Máme $46! \cdot 47! \cdot 48! \cdot 49! = 47 \cdot (46!)^2 \cdot (48!)^2 \cdot 7^2$, tedy největší druhou mocninou, která je dělitelem čísla N, je číslo $N/47$.

Úloha 3. *Najděte všechna přirozená* n, *pro něž existuje pořadí* $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$ *čísel* $1, 2, \dots, 10$, *jež vyhovuje rovnici*

$$\frac{x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5}{x_6\,x_7\,x_8\,x_9\,x_{10}} = n$$

Důkaz. Číslo n musí být ve tvaru $2^{k_2} \cdot 3^{k_3} \cdot 5^{k_5} \cdot 7$, kde k_2, k_3, k_5 jsou přirozená čísla. Kdybychom všechna čísla od jedné do deseti narvali do čitatele (to se ovšem nesmí), dostali bychom $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$. Pokud některá z čísel přesuneme do jmenovatele (aniž by hodnota zlomku přestala být přirozené číslo), dojde ke krácení a exponenty se mohou snížit o sudá čísla.

Abychom dostali číslo 7, je třeba přesunout do jmenovatele $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Toto číslo lze vyjádřit jako součin pěti čísel třeba $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$.

Tedy

$$7 = \frac{1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}.$$

Připomeňme: součin všech čísel ve hře je $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$,

$$7 = \frac{1 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}.$$

Další čísla lze získat tak, že nějaké číslo ze jmenovatele vyměníme za jedničku. Tímto způsobem dostaneme postupně čísla $7 \cdot 2^2$, $7 \cdot 3^2$, $7 \cdot 4^2$, $7 \cdot 5^2$, $7 \cdot 6^2$.

V případě posledního čísla $7 \cdot 6^2$ nabývá zlomek vůbec největší možné hodnoty

$$7 \cdot 6^2 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

protože každé číslo v čitateli je větší než každé číslo ve jmenovateli. Hledaná čísla tedy musí být tvaru $7 \cdot m^2$, kde $m \in \{1, \dots, 6\}$, a pro všechna tato čísla jsme vyjádření našli.

Úloha 4. *Na tabuli je zapsáno sedm čísel* p^2, pq, q^2, p^3, p^2q, pq^2 *a* q^3, *kde* p *a* q *jsou dvě různá prvočísla. Po šesti krocích popsaných v soutěžní úloze zůstalo na tabuli jediné číslo. Určete ho bez rozboru všech možných postupů, jakými lze jednotlivé kroky volit.*

UK v Praze a UJEP v Ústí n. L.

Důkaz. Poslední číslo na tabuli bude pq. Součin všech čísel na tabuli je na počátku p^9q^9, a proto po každém kroku bude mít hodnotu p^mq^n s lichými exponenty m a n.

Pro číslo p^mq^n, které jako jediné zůstane nakonec, navíc musí platit $m+n \le 3$ (jako pro každé číslo, jež dostaneme v průběhu prováděných kroků), takže musí být $m = n = 1$.

Možný postup kroků:

$$\begin{array}{ccccccc}
p^2, & pq, & \underline{q^2}, & p^3, & p^2q, & pq^2, & \underline{q^3} \\
\underline{p^2}, & pq, & & \underline{p^3}, & p^2q, & pq^2, & q \\
 & \underline{pq}, & & p, & \underline{p^2q}, & pq^2, & q \\
 & & & \underline{p}, & \underline{p}, & pq^2, & q \\
 & & & & \underline{1}, & \underline{pq^2}, & q \\
 & & & & & \underline{pq^2}, & \underline{q} \\
 & & & & & pq &
\end{array}$$

Úloha 5. *Najděte nejmenší k mezi 1 a 33, aby*

$$\frac{33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot \dots \cdot (k+2)(k+1)}{k!} > 1.$$

Důkaz. Nejdříve uděláme přibližný odhad. Zkusme dát do čitatele čísla $33, 32, \dots, 26$, do jmenovatele $2 \cdot 3 \dots 17$ a zkoumejme, jak velký asi bude podíl. Podle toho rozhodneme, zda dál přidávat do čitatele nebo do jmenovatele, nebo dokonce přesouvat. Krátíme $33 = 3 \cdot 11$, $32 = 4 \cdot 8$, $30 = 5 \cdot 6$, $26 = 2 \cdot 13$, $28 \cdot 27 = 4 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 9 = 7 \cdot 9 \cdot 12$ a dostaneme

$$\frac{33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17} = \frac{31 \cdot 29}{10 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}$$

Teď použijeme přibližný vzorec $29 \cdot 31 \sim 30^2$ a dostaneme

$$\frac{33 \cdot 32 \dots 26}{2 \cdot 3 \dots 17} \sim \frac{30 \cdot 30}{10 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17} = \frac{3}{7 \cdot 16 \cdot 17}$$

$$\frac{33 \cdot 32 \dots 26}{2 \cdot 3 \dots 17} \sim \frac{30 \cdot 30}{10 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17} = \frac{3}{7 \cdot 16 \cdot 17}$$

V čitateli tedy trochu přitopíme a dostaneme

$$\frac{33 \cdot 32 \dots 24}{2 \cdot 3 \dots 17} \sim \frac{3 \cdot 25 \cdot 24}{7 \cdot 16 \cdot 17}.$$

Použijeme přibližný vzorec $16 \cdot 17 \sim 15 \cdot 18$ a máme

$$\frac{33 \cdot 32 \dots 24}{2 \cdot 3 \dots 17} \sim \frac{3 \cdot 25 \cdot 24}{7 \cdot 15 \cdot 18} = \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 3} \sim 1.$$

Teď už můžeme značně povolit na přesnosti. Zbývající čísla jsou přibližně stejně velká, tedy do čitatele i jmenovatele přihodíme tři a dostaneme

$$a := \frac{33 \cdot 32 \dots 21}{2 \cdot 3 \dots 20} \text{ je něco přes jedničku.}$$

Hypotéza je $k = 20$.

Nyní budeme provádět přesné odhady. Nejprve pokrátíme na nejvyšší možnou míru: máme $33 = 3 \cdot 11$, $32 = 4 \cdot 8$, $30 \cdot 28 = 12 \cdot 10 \cdot 7$, $27 \cdot 25 = 5 \cdot 9 \cdot 15$, $26 = 2 \cdot 13$, máme

$$a = \frac{31 \cdot 29 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{6 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20} = \frac{31 \cdot 29 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 23 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 3 \cdot 7}{6 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 20}$$
$$= \frac{31 \cdot 29 \cdot 23 \cdot 11}{4 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 20}.$$

Použijeme nerovnosti $\frac{23}{20} > \frac{24}{21}$, $\frac{31 \cdot 29}{21 \cdot 19} > \frac{30^2}{20^2}$ a dostaneme

$$a > \frac{31 \cdot 29 \cdot 24 \cdot 11}{4 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 21} > \frac{30 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 11}{4 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 20} = \frac{9 \cdot 11}{4 \cdot 17} > 1.$$

Spočetli jsme

$$a > \frac{31 \cdot 29 \cdot 24 \cdot 11}{4 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 21} > \frac{30 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 11}{4 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 20 \cdot 20} = \frac{9 \cdot 11}{4 \cdot 17} > 1.45.$$

Teď zkusíme podobně jemný horní odhad:

$$\begin{aligned} a &= \frac{31 \cdot 29 \cdot 23 \cdot 11}{4 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 20} < \frac{30 \cdot 30 \cdot 23 \cdot 11}{4 \cdot 17 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 20} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 22}{16 \cdot 17 \cdot 19} \\ &< \frac{15 \cdot 23 \cdot 22}{15 \cdot 18 \cdot 19} = \frac{23 \cdot 11}{9 \cdot 19} < 1.48. \end{aligned}$$

Vidíme, že $1.45 < a < 1.48$. Kdybychom přesunuli 21 do jmenovatele, dostali bychom se hluboko pod jedničku. Hledané číslo je $k = 20$.

Úloha 6. *Najděte nejmenší přirozené číslo, které lze dostat doplněním závorek do výrazu* $15 : 14 : 13 : 12 : 11 : 10 : 9 : 8 : 7 : 6 : 5 : 4 : 3 : 2$.

Důkaz. Abychom si zjednodušili život, budeme psát $a : b : c$ místo jednoznačnějšího $(a : b) : c$. Jakékoli číslo, které lze získat doplněním závorek do zadaného výrazu, lze získat i jako podíl součinů, kde v čitateli i jmenovateli jsou čísla z množiny $\{2, \dots, 15\}$ a každé z nich je použito právě jednou.

Mějme tedy podíl tohoto tvaru a ptejme se obráceně, zdali je možné ho vytvořit podle pokynů úlohy. Vidíme, že ať děláme co děláme, 15 zůstane v čitateli a 14 ve jmenovateli. To jsou ale jediná omezení. Uděláme-li závorku před 14, 13 se přesune do čitatele, jinak zůstane ve jmenovateli. Závorkou před číslem 13 rozhodneme o umístění čísla 12 atd. Pokud necháme všechna čísla až na 14 v čitateli, vyjde nám

$$15 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2^9 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 13.$$

Připomeňme největší možný výsledek

$$2^9 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 11 \cdot 13.$$

Pokud přesunem některého čísla do jmenovatele vznikne přirozený podíl, exponenty u prvočíselného rozkladu se mohou snížit jen o sudá čísla. Exponent u trojky můžeme snížit maximálně na 2, protože 15 musí zůstat v čitateli. Nejmenší možný výsledek je tedy $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 12870$. Máme

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 &= \frac{15 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13}{14} \\ &= \frac{15 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 13}{14} \cdot \frac{10}{5 \cdot 2} \cdot \frac{9 \cdot 8}{6 \cdot 12} \\ &= 15 : (14 : (13 : (12 : 11 : 10 : 9 : 8 : (7 : 6 : (5 : 4 : (3 : 2)))))). \end{aligned}$$

Kongruence. Připomeňme následující relaci na množině všech celých čísel: říkáme, že $a \equiv b \mod n$ (čti modulo n), jestliže $n \mid (a - b)$ (čti n dělí $a - b$). Je-li $r(a)$ zbytek při celočíselném dělení $a \div n$, pak $a \equiv b$ modulo n, právě když $r(a) = r(b)$. S kongruencí se zachází podle vzorců

$$\left.\begin{aligned} a \equiv b \mod n, \\ c \equiv d \mod n \end{aligned}\right\} \implies \left\{\begin{aligned} a + c \equiv b + d \mod n, \\ ac \equiv bd \mod n \end{aligned}\right.$$

Úloha 7. *V každém vrcholu pravidelného n-úhelníku leží jedna mince. V každém tahu můžeme vybrat jednu minci a přesunout ji o 6 míst proti směru hodinových ručiček. Pro která n můžeme tímto způsobem postupně přesunout všechny mince na jednu hromadu?*

Důkaz. Představujeme si, že každému celému číslu k odpovídá jedna pozice a ta je očíslovaná číslem $r(k)$, což je zbytková třída k modulo n. Při jednom tahu posuneme minci z pozice k na pozici $k+6$, čímž se změní zbytková třída z $r(k)$ na $r(k+6)$. Na konci mají být všechny mince na pozici očíslované q, tedy ke každému k musí existovat m tak, že

$$k + 6m \equiv q \qquad \mod n,$$

násobky $6m$, $m = 1, 2, \dots$ musí navštívit všechny zbytkové třídy. To je právě v tom případě, že čísla 6 a n jsou nesoudělná.

Úloha 8. *V každém vrcholu pravidelného 2008-úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout: a) na 8 hromádek po 251 mincích, b) na 251 hromádek po 8 mincích.*

Důkaz. Na 8 hromádek po 251, to nic není, rozdělíme 2008-úhelník na 8 úseků po 251 mincích a každý úsek shrneme doprostřed. Horší bude dokázat, že 251 hromádek po 8 mincích nejde. Opět použijeme "periodický model".

Významným ukazatelem pro n-úhelník je zbytková třída při kongruenci modulo n pro výraz

$$V = \ldots - 2p(-2) - 1p(-1) + p(1) + 2p(2) + 3p(3) + \ldots,$$

kde $p(k)$ počet mincí na k-té pozici. Potom

$$V \equiv V' \quad \bmod n \quad \text{pro } V' := p'(1) + 2p'(2) + \cdots + (n-1)p'(n-1),$$

kde $p'(r)$ je celkový počet mincí na pozicích očíslovaných číslem r. Posuneme-li jednu minci z k na $k+1$ a současně jinou z m na $m-1$, hodnota V se změní na $V - k + (k+1) - m + (m-1) = V$, takže se nezmění, říkáme, že V je *invariant*. Na začátku je na pozicích $0, \ldots, n-1$ po jedné minci a jinde není nic. Pak

$$V_{\text{start}} = 0 + 1 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Dosadíme-li $n = 2008$, $V_{\text{start}} = \frac{251 \cdot 8(251 \cdot 8 - 1)}{2}$, což není dělitelné osmi.

Cílové rozložení je takové, že existují r_1, r_2, $\ldots r_{251}$, tak, že pro každé $j = 1, \ldots, 251$ máme právě 8 mincí na pozicích očíslovaných r_j. Tedy

$$V_{\text{cíl}} \equiv 8r_1 + 8r_2 + \cdots + 8r_{256},$$

to je dělitelné osmi. Tedy $V_{\text{start}} \not\equiv V_{\text{cíl}}$ a přesun nelze provést.

Úloha 9. *V každém z vrcholů pravidelného n-úhelníku leží určitý počet mincí: v k-tém vrcholu je to právě k mincí, $1 \le k \le n$. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu takových přemístění docílit toho, že pro libovolné k, $1 \le k \le n$, bude na k-tém vrcholu ležet $n+1-k$ mincí.*

Důkaz. Nutnou podmínkou je $V_{\text{start}} \equiv V_{\text{cíl}} \bmod n$. Je to také podmínka postačující? Předpokládejme, že podmínka je splněna. Vyberme si jednu pevnou minci. Ostatními mincemi šoupejme zcela svobodně, zatímco vybranou mincí vždy vyvažujme pohyby uskutečněné ostatními mincemi. Jsou li ostatní mince na svém místě, vybraná musí být také na svém místě, protože jinak by se neodpovídala hodnota invariantu.

Počítejme tedy, kdy $V_{\text{start}} \equiv V_{\text{cíl}} \bmod n$. Na začátku máme

$$V_{\text{start}} \equiv 1^2 + 2^2 + \ldots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

na konci

$$\begin{aligned} V_{\text{cíl}} &\equiv 1n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1 \\ &= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\ &+ (n-1) + 2(n-2) + 3(n-3) + \cdots + (n-1) \cdot 1 + n \cdot 0 \\ &\equiv (1 + 2 + 3 + \cdots + n) - (1 + 4 + 9 \cdots + n^2) \\ &\equiv \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = -\frac{n(n+1)(2n-2)}{6} \end{aligned}$$

Odtud

$$V_{\text{start}} - V_{\text{cíl}} \equiv \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

Jde o to, zda číslo $\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$ je dělitelné n. Napišme n ve tvaru $n = 6m + r$, kde $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Je-li $r = 0$, pak

$$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} = m(6m+1)(24m-1).$$

Toto číslo není dělitelné $n = 6m$.

Je-li $n = 6m + 1$, pak

$$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} = \frac{(6m+1)(6m+2)(24m+3)}{6} = (6m+1)(3m+1)(8m+1).$$

Toto číslo je dělitelné $n = 6m + 1$.

Je-li $n = 6m + 2$, pak

$$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} = \frac{(6m+2)(6m+3)(24m+7)}{6} = (3m+1)(2m+1)(24m+7).$$

Toto číslo není dělitelné $n = 2(3m + 1)$.

Je-li $n = 6m + 3$, pak

$$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} = \frac{(6m+3)(6m+4)(24m+11)}{6} = (2m+1)(3m+2)(24m+7).$$

Toto číslo není dělitelné $n = 3(2m + 1)$.

Je-li $n = 6m + 4$, pak

$$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} = \frac{(6m+4)(6m+5)(24m+15)}{6} = (3m+2)(6m+5)(8m+5).$$

Toto číslo není dělitelné $n = 2(3m + 2)$.

Je-li $n = 6m+5$, pak

$$\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} = \frac{(6m+5)(6m+6)(24m+19)}{6} = (6m+5)(m+1)(24m+19).$$

Toto číslo je dělitelné $n = 6m + 5$.

Závěr: řešením úlohy jsou čísla n, která při dělení 6 dávají zbytek 1 nebo 5.

Úloha 10. *V každém z vrcholů pravidelného n-úhelníku leží jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do jiného vrcholu tak, že jedna se posune o dvě ve směru (doprava) a druhá o jednu proti směru (doleva) chodu hodinových ručiček. Rozhodněte, která rozložení mincí lze tímto způsobem docílit.*

Důkaz. Hledáme-li podobný invariant jako v předchozích úlohách, nenacházíme. Musíme použít zcela jinou metodu. Úloha je ekvivalentní s úlohou inverzní, totiž zda se povolenými tahy dá z čehokoli udělat rovnoměrné rozdělení. Ukážeme, že ano. Najdeme algoritmus, jak z každé necílové pozice udělat pozici, v níž je počet neobsazených míst o jednu menší. Vybereme maximální skupinu po sobě jdoucích obsazených pozic a očíslujeme je zleva čísly $1, 2, \ldots, k$. Nyní rozlišíme několik možností.

(a) Na pozici $k > 1$ je dvě nebo více mincí. Posuneme jednu minci z pozice k o jednu doleva, zatímco minci z pozice $(k - 1)$ o dvě doprava. Výsledný efekt je jako bychom posunuli z pozice k jednu minci o jednu doprava. Tímto postupem je možné postupně sesouvat mince doprava a zaplňovat díry vpravo od skupiny. Zbývá případ, že všechny pozice ve skupině až na prvou jsou zaplněny jednou mincí.

(b) Na pozici 1 jsou tři nebo více mincí. Rozhodíme-li dvě z nich, zaplníme díru vlevo od skupiny.

(c) Na pozici 1 jsou dvě mince a pozice 2, 3 jsou obě obsazené. Posuneme z pozice 3 na pozici 2 a z pozice 1 na pozici 3. Pozice $1, 2, 3$ zůstanou obsazené, na pozici 2 jsou aspoň dvě mince. Dále postupujeme podle bodu (a).

(d) Na pozici 1 jsou dvě mince, pozice 3 je prázdná. Rozhodíme-li mince z pozice 1, vznikne tam díra, ale díry na pozicích 3 a 0 se zaplní.

(e) Na pozici 1 jsou dvě mince, pozice 3 je obsazená, ale pozice 2 je prázdná. Posuneme z 3 do 2 a z 1 do 3 a tím zaplníme díru na pozici 2.

Nyní již zbývá jen případ, kdy na všech pozicích skupiny je jen po jedné minci. Jelikož celkový počet mincí je n, kdyby takto vypadaly všechny skupiny, dosáhli jsme cíle.