SČÍTÁNÍ PRO POKROČILÉ

JAN MALÝ

V této přednášce se budeme zabývat součty tvaru $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$. Takové součty bývá zvykem zapisovat

$$\sum_{n=1}^{m} a_n.$$

Ze školy známe:
Součet aritmetické posloupnosti:

$$\sum_{n=1}^{m} n = 1 + 2 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}.$$

Součet geometrické posloupnosti:

$$\sum_{n=0}^{m} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^m = \frac{q^m - 1}{q - 1}.$$

Jak lze odvodit další podobné výsledky?
Základní metoda je převedení na teleskopickou řadu.
Máme

$$(b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_m - b_{m-1}) = b_m - b_0.$$

Problém. Jak vyjádřit a_n ve tvaru $b_n - b_{n-1}$?
Ne vždy to jde! I když taková posloupnost b_n vždy existuje, často pro ni nelze najít vhodný vzorec.
Někdy potřebný vzorec nemáme, ale aspoň dokážeme udělat nějaké odhady.

Příklad 1. $1 + 2^2 + \cdots + m^2 = ?$

Zkusíme hledat b_n ve tvaru n^k.

$$\begin{aligned} n^3 - (n-1)^3 &= 3n^2 - 3n + 1 \\ n^2 - (n-1)^2 &= 2n - 1 \\ n - (n-1) &= 1. \end{aligned}$$

Žádná z pravých stran není to co chceme. Když ale vydělíme první rovnici třemi, druhou dvěmi, třetí šesti a všechno sečteme, dostaneme

$$\left[\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}\right] - \left[\frac{(n-1)^3}{3} + \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{n-1}{6}\right] = n^2.$$

Máme tedy $b_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$.
Po úpravě

$$b_n = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} = \frac{2n^3 + 3n + 1}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Sečtěme přes $n = 1, \dots, m$ a dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} n^2 &= 1 + 2^2 + \cdots + m^2 \\ &= (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \cdots + (b_m - b_{m-1}) \\ &= b_m - b_0 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.\end{aligned}$$

Příklad 2. $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{m(m-1)} = ?$

Máme

$$\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

tedy

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{m(m-1)} \\ &= \Bigl(1 - \frac{1}{2}\Bigr) + \Bigl(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Bigr) + \Bigl(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\Bigr) + \cdots + \Bigl(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\Bigr) \\ &= 1 - \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Příklad 3.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{m^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} = ?$$

Tady žádný rozumný vzoreček nenajdeme. Sčítáme-li až “do nekonečna”, dostaneme

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Důkaz tohoto tvrzení přesahuje možnosti středoškolské matematiky.

Příklad 4.

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos mx = ?$$

Máme

$$\begin{aligned}\sin nx - \sin(nx - x) &= \sin nx - \sin nx \cos x + \cos nx \sin x, \\ \cos nx - \cos(nx - x) &= \cos nx - \cos nx \cos x - \sin nx \sin x,\end{aligned}$$

neboli

$$\begin{aligned}\sin nx - \sin(n-1)x &= \sin x \cos nx + (1 - \cos x) \sin nx, \\ \cos nx - \cos(n-1)x &= (1 - \cos x) \cos nx - \sin x \sin nx.\end{aligned}$$

První řádek vynásobíme $\sin x$, druhý řádek $(1 - \cos x)$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\sin x(\sin nx - \sin(n-1)x) &= \sin^2 x \cos nx + \sin x(1 - \cos x) \sin nx, \\ (1 - \cos x)(\cos nx - \cos(n-1)x) &= (1 - \cos x)^2 \cos nx \\ &\qquad - \sin x(1 - \cos x) \sin nx.\end{aligned}$$

Sečteme:

$$\begin{aligned}&\sin x(\sin nx - \sin(n-1)x) + (1 - \cos x)(\cos nx - \cos(n-1)x) \\ &\quad = ((1 - \cos x)^2 + \sin^2 x) \cos nx\ .\end{aligned}$$

Vyjádříme si odtud $\cos nx$:

$$\cos nx = \frac{\sin x(\sin nx - \sin(n-1)x) + (1 - \cos x)(\cos nx - \cos(n-1)x)}{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x}\ .$$

Sečteme přes $n = 1, \dots, m$:

$$\cos x + \cdots + \cos mx = \frac{\sin x \sin mx + (1-\cos x)(\cos mx - 1)}{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x} \,. \tag{1}$$

Jiné řešení:

$$\sin(n + \tfrac{1}{2})x - \sin(n - \tfrac{1}{2})x = 2\cos nx \ \sin\tfrac{x}{2},$$

odtud

$$\cos nx = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin(n - \frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} \,.$$

Sečteme přes $n = 1, 2, \dots, m$ a dostaneme

$$\cos x + \cdots + \cos mx = \frac{\sin(m + \frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}} \,. \tag{2}$$

Pokaždé nám vyšlo něco jiného (porovnejte (1) a (2)), ale obojí je dobře.

Příklad 5.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m} ?$$

Zde nenajdeme pěkný vzoreček. Můžeme však odvodit zajímavé nerovnosti. Vyjdeme ze znalosti vzorce

$$\ln x \le x - 1, \qquad x \in (0, \infty).$$

Speciálně

$$\ln\bigl(1 \pm \tfrac{1}{n}\bigr) \le \pm\tfrac{1}{n},$$

takže

$$\ln(n+1) - \ln n \le \frac{1}{n} \le \ln n - \ln(n-1). \tag{3}$$

Sečteme-li vlevo přes $n = 1, \dots, m$, dostaneme

$$\ln(m+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}. \tag{4}$$

Nerovnost vpravo v (3) sečteme jen od 2 do m (proč ne od jedné), a dostaneme

$$\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \le \ln m \,.$$

Přičteme jedničku, zopakujeme odhad (4) a máme

$$\ln(m+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \le 1 + \ln m \,.$$

Příklad 6.

$$(\ln 1 +) \ \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln m \,?$$

I tady máme šanci jen v nerovnostech. Jelikož $\ln n - \ln(n-1) \le \frac{1}{n-1}$ (v odhadu (3) posuneme n o jedničku), máme

$$\begin{aligned} n\ln n - (n-1)\ln(n-1) &= \Bigl(n - (n-1)\Bigr)\ln n + (n-1)(\ln n - \ln(n-1)) \\ &\le \ln n + 1 \,. \end{aligned}$$

Sečteme od 2 do m a dostaneme

$$m \ln m \le \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln m + (m-1) \,,$$

tedy

$$\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln m \ge m\ln m - (m-1) = m(\ln m - \ln e) + 1 \,.$$

Odlogaritmováním této nerovnosti dostaneme

$$m! \ge e\Bigl(\frac{m}{e}\Bigr)^m \,.$$

Podobně nerovnost $\ln n - \ln(n-1) \geq \frac{1}{n}$ nám dá

$$\begin{aligned}(n+1)\ln n - n\ln(n{-}1) &= \ln n + n(\ln n - \ln(n{-}1))\\ &\geq \ln n + 1\,.\end{aligned}$$

Sečtením přes n od 2 do m dostaneme

$$\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln m \leq (m+1)\ln m - m + 1 = (m+1)(\ln m - \ln e) + 2$$

a odlogaritmováním

$$m! \leq e^2\Big(\frac{m}{e}\Big)^{m+1}.$$

Celkem

$$e\Big(\frac{m}{e}\Big)^{m} \leq m! \leq e^2\Big(\frac{m}{e}\Big)^{m+1}.$$

Zábava na zbytek přednášky.

Označme $\ell_p(n)$ největší dělitel čísla n, který není dělitelný p. Např. pro $n = 360$ je

$$\begin{aligned}\ell_2(n) &= 360 : 2^3 = 45,\\ \ell_3(n) &= 360 : 3^2 = 40,\\ \ell_5(n) &= 360 : 5 = 72,\\ \ell_7(n) &= 360.\end{aligned}$$

Prostě číslo n tak dlouho dělíme p, dokud to jde, výsledek je $\ell_p(n)$.

Zabývejme se nyní případem $p = 3$. Zvolme $m \in \mathbb{N}$ a označme

$$\begin{aligned}D &= \{n \in 1,2,\dots,3m : 3|n\},\\ N &= \{n \in 1,2,\dots,3m : 3 \nmid n\},\\ D^* &= \{n \in D : n > m\},\\ D_* &= \{n \in D : n \leq m\},\\ N^* &= \{n \in N : n > m\},\\ N_* &= \{n \in N : n \leq m\}.\end{aligned}$$

Jestliže $n \in D^*$, potom $n/3 \leq m$ a tudíž $\ell_3(n) \in N_*$.

Tvrzení 1. *Zobrazení $\ell_3 \colon D^* \to N_*$ je prosté a na.*

Důkaz. Zvolme $k \in N_*$, chceme dokázat, že existuje právě jedno $n \in D^*$ tak, že $\ell_3(n) = k$. Víme, že $\ell_3(n) = k$, ptávě když n je jedním z čísel

$$k,\ 3k,\ 3^2k,\ 3^3k, \dots$$

Mezi těmito čísly je právě jedno n takové, že

$$m < n \leq 3m.$$

Totiž, najdeme nejmenší přirozené j splňující $3^jk > m$ a položme $n = 3^jk$.

- Nerovnost $n > m$ je splněna přímo výběrem.
- Nerovnost $n \leq 3m$: Jestliže $j > 1$, potom $3^{j-1}k \leq m$ (protože j bylo "nejmenší") a tudíž $n = 3^jk \leq 3m$. Jestliže $j = 1$, pak využijeme, že $k \in N_*$, tedy $k \leq m$ a $n = 3k \leq 3m$.
- Jednoznačnost: Nechť $n' = 3^ik$. Pokud $i < j$, pak $n' = 3^ik \leq n/3 \leq 3m/3 \leq m$. Pokud $i > j$, pak $n' = 3^ik \geq 3n > 3m$. Nerovnostem $m \leq n' < 3m$ vyhovuje tedy jen $i = j$.

$\square$

Poznámka. Množiny D^* a N_* mají tedy stejný počet prvků. Kdybychom to věděli dřív, stačilo by dokázat jen "prosté" nebo jen "na". Jak by se tvrzení o stejném počtu prvků dalo dokázat nezávisle?

Tvrzení 2. $\ell_3(m+1) + \cdots + \ell_3(3m) = 3m^2$.

Důkaz. Zobrazení ℓ_3 je identita na N^*, takže $\ell_3\colon \{m+1, \ldots, 3m\} \to N$ je bijekce. Máme

$$\begin{aligned}\sum_{n=m+1}^{3m} \ell_3(n) = \sum_{k\in N} k & \\ &= 1+2+4+5+\cdots+(3m-1)\\ &= (1+2+3+\cdots+3m) - (3+6+\cdots+3m)\\ &= (1+2+3+\cdots+3m) - 3(1+\cdots+m)\\ &= \frac{3m(3m+1)}{2} - \frac{3m(m+1)}{2} = 3m^2.\end{aligned}$$

Tvrzení 3. *Nechť $q \in \mathbb{N}$. Potom*

$$\sum_{n=1}^{3^q} \ell_3(n) = 1 + \frac{3}{8}(9^q - 1).$$

Důkaz. Rozdělíme si sčítání po skupinkách $3^{j-1} < n \le 3^j$, $j = 1, \ldots, q$. Aplikujeme-li předchozí výsledek na $m = 3^{j-1}$, dostaneme pro takovou skupinku součet $3m^2 = 3^{2j-1}$. Tedy

$$\sum_{n=2}^{3^q} \ell_3(n) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{n=3^{j-1}+1}^{3^j} \ell_3(n) = \sum_{j=1}^{q} 3^{2j-1} = \frac{3(9^q-1)}{9-1}.$$

Zbývá připočíst $\ell_3(1) = 1$.

Univerzita Karlova v Praze, Matematicko fyzikální fakulta.
Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí n. L., Přírodovědecká fakulta.