POLYNOMY[1]

Jan Malý
UK v Praze a UJEP v Ústí n. L.

Soustavy o jedné rovnici neboli rovnice.

Algebraické rovnice: Polynom= 0.

Rovnice 1. stupně: *lineární*, $ax + b = 0$, $a \neq 0$. Řešení: $x = \frac{-b}{a}$.

Rovnice 2. stupně: *kvadratické*, $ax^2 + bx + c = 0$. Řešení: $D := b^2 - 4ac$.

Pokud $D > 0$, dvě řešení $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Pokud $D = 0$, jedno řešení $x = \frac{-b}{2a}$.

Pokud $D < 0$, žádné reálné řešení (ale tzv. komplexní řešení).

Rovnice 3. stupně: *kubické*, $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Řešení: Cardanovy vzorce (komplikované, přes komplexní čísla).

Rovnice 4. stupně: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$. Řešení: komplikované.

Rovnice 5. a vyšších stupňů: řešení jen přibližnými metodami.

Co je třeba znát:

Nechť $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ je polynom n-tého stupně. Pokud z je řešení rovnice $P(x) = 0$, potom je polynom P dělitelný dvojčlenem $(x - z)$. Je-li dokonce dělitelný výrazem $(x - z)^k$, říkáme, že z je *k-násobný kořen* (polynomu nebo rovnice). *Násobnost* kořene je nejvyšší takové číslo k. Polynom n-tého stupně má nejvýše n kořenů (i když je započítáváme s násobností).

V oboru komplexních čísel má každý polynom n-tého stupně přesně n kořenů (započítáno s násobností). V oboru reálných čísel může mít méně kořenů.

V situaci, kdy má polynom $P(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ přesně n kořenů (započítáno s násobností) $z_1, \ldots, z_n$, můžeme jej rozložit na *kořenové činitele*

$$P(x) = a_n(x - z_1)\ldots(x - z_n).$$

Důležitým pomocníkem při práci s polynomy jsou *Viètovy vztahy* mezi koeficienty a kořeny polynomu, rozložitelného na kořenové činitele. Stupeň polynomu může být jakýkoli, zde se pro jednoduchost omezíme na kvadratické a kubické polynomy.

Vyjdeme z rozkladu kvadratického polynomu na kořenové činitele:

$$ax^2 + bx + c = a(x - z_1)(x - z_2) = a\Big(x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1z_2\Big),$$

dostáváme

$$\begin{aligned} b &= -a(z_1 + z_2),\\ c &= a\,z_1z_2. \end{aligned}$$

Podobně pro kubický polynom

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)$$

dostáváme

$$\begin{aligned} b &= -a(z_1 + z_2 + z_3),\\ c &= a(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3),\\ d &= -a\,z_1z_2z_3. \end{aligned}$$

Úloha. *Najděte všechna řešení rovnice*

$$x^3 - 9x^2 - x + 105 = 0.$$

Řešení. Řešit kubickou rovnici pomocí Cardanových vzorců není snadné, pokusíme se raději řešení uhodnout. Pokusem zjistíme, že 1 ani -1 neřeší. Zkusme, co kdyby náhodou polynom měl tři celočíselné kořeny z_1, z_2, z_3. Z Viètových vztahu bychom dostali $z_1z_2z_3 = -105$. Chceme-li napsat číslo 105 jako součin tří přirozených čísel > 1, máme jedinou možnost $105 = 3\cdot 5\cdot 7$, abychom dostali záporný výsledek,

[1]Přednáška na krajském soustředění matematické olympiády, Litom25ice, 7. 10. 2007

musíme dodat lichý počet minusů. Vezmeme v úvahu další z Viètových vztahu, totiž $z_1 + z_2 + z_3 = 9$. Probereme-li možnosti, máme (až na pořadí) $z_1 = 7$, $z_2 = 5$, $z_3 = -3$. Až dosud jsme hádali, ale zkouška nám neomylně dokazuje $P(x) = (x-7)(x-5)(x+3)$. Rovnice má tedy tři řešení: 7, 5, -3.

Soustavy (algebraických rovnic): složitější než "jedna rovnice".

V úlohách na soustavy máme nejčastěji stejný počet rovnic jako neznámých.

Pokud máme více neznámých než rovnic, je soustava poddeterminovaná a "většinou" má nekonečně mnoho řešení. (Ale třeba soustava $\begin{matrix} x+y+z=1, \\ x+y+z=2 \end{matrix}$ dvou rovnic o třech neznámých nemá žádné řešení).

Pokud máme více rovnic než neznámých, je soustava předeterminovaná a "většinou" nemá žádné řešení. (Ale třeba soustava $\begin{matrix} x=1 \\ 2x=2 \end{matrix}$ dvou rovnic o jedné neznámé má řešení).

Úloha. *Najděte všechna řešení soustavy*

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0, \\ 2x-y+z &= -2, \\ -3x+y-2z &= 5. \end{aligned}$$

Řešení. Od druhé rovnice odečteme dvojnásobek prvé rovnice. Pak k třetí rovnici přičteme trojnásobek prvé rovnice. Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0, \\ -3y-z &= -2, \\ 4y+z &= 5. \end{aligned}$$

Se4teme třetí rovnici a druhou, máme

$$\begin{aligned} x+y+z &= 0, \\ -3y-z &= -2, \\ y &= 3. \end{aligned}$$

Odtud postupným dosazováním dostaneme

$$y=3,\ z=-7,\ x=4.$$

Příklad. Chceme všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned} x+y-z &= 0, \\ x-y+z &= 0, \\ -x+y+z &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Abychom vyeliminovali některé proměnné z rovnic, od prvé rovnice odečteme druhou, pak od druhé odečteme třetí a konečně od třetí odečteme prvou. Dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} 2y-2z &= 0, \\ 2x-2y &= 0, \\ 2z-2x &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Vidíme že trojice (x, y, z) řeší (2), (právě) když $x = y = z$. Ale co to? Dosadíme-li např. $x = y = z = 1$ do (1), nedostaneme rovnost. Kde jsme udělali chybu?

Úpravy, kterých jsme se dopustili, nebyly ekvivalentní (vratné). Řešíme-li soustavy rovnic úpravami, je dobré se držet následujících pravidel:

Je vhodné upravit v jednom kroku jen jednu z rovnic soustavy, abychom neztratili přehled. Přitom se přesvědčíme, za úprava je vratná, zda najdeme úpravu, která by z nové soustavy zrekonstruovala předchozí. Například nahradíme-li druhou rovnici součtem prvé a třetí rovnice, zcela ztratíme informaci z druhé rovnice.

Někdy je nutné dopustit se úpravy, která není ekvivalentní. Pak je nutné po výpočtu provést zkoušku.

Dosud jsme řešili soustavy *lineárních rovnic*, to je nejjednodušší případ, lze zvládnout algoritmem. Vede na teorii *matic* a *determinantů*.

Jedna lineární rovnice o dvou neznámých má tvar $ax + by + c = 0$. Pokud aspoň jedno z čísel a, b je nenulové, množina všech řešení je přímka. Úloha nalézt řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých má geometrický význam najít průnik dvou přímek. Statisticky vzato, nejčastěji to bývá bod, ale může to být i přímka nebo prázdná množina.

Zkusme postupně zvyšovat stupeň rovnic. Připomeňme, že algebraická rovnice o jedné neznámé může mít nekonečně mnoho řešení pouze v případě, že jde o rovnici $0 = 0$. Oproti tomu i netriviální soustavy mohou mít nekonečně mnoho řešení. Pokud jich však mají konečně mnoho, jejich počet můžeme odhadnout. Lze dokázat, že soustava rovnice stupně n a rovnice stupně m má nejvýše nm řešení, pokud jich nemá nekonečně mnoho.

Kvadratická rovnice o dvou neznámých má obecný tvar

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Množina všech řešení je kuželosečka (kružnice, elipsa, hyperbola, parabola, přímka, dvojice přímek, bod, prázdná množina).

Máme-li soustavu lineární a kvadratické rovnice o neznámých x a y, z lineární rovnice vyjádříme y a dosadíme do kvadratické rovnice.

Úloha.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ y - 2x - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Řešení. Z druhé rovnice vypočítáme $y = 2x + 1$ a dosadíme do prvé rovnice. Dostaneme

$$x^2 + (2x + 1)^2 = 1, \text{ neboli } 5x^2 + 4x = 0.$$

Řešení jsou $(x, y) = (0, 1)$ a $(x, y) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

Úloha. *Nechť žebřík o délce* $\ell = \frac{4}{3}\sqrt{10}$ *je opřen o bednu o rozměrech* 1×1. *Jak vysoko dosáhne?*

Řešení. Označme A roh místnosti, B dolní konec žebříku, C horní konec žebříku a P bod, v němž se žebřík opírá o bednu. Potom $\ell = BC$, položme $x = AB$, $y = AC$. Dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \ell^2, \\ xy &= x + y. \end{aligned} \tag{3}$$

První rovnice je Pythagorova věta pro ABC, druhá vznikne porovnáním obsahů trojúhelníků ABS, ACS a ABC.

K první rovnici přičteme dvojnásobek druhé rovnice a dostaneme

$$(x + y)^2 = 2(x + y) + \ell^2.$$

Substitujme $w = x + y$. Rovnice $w^2 - 2w - \frac{160}{9} = 0$ má řešení

$$w_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{160}{9}} = 1 \pm \frac{13}{3}.$$

Pouze kladné řešení $x + y = \frac{16}{3}$ má geometrický význam.

Ze soustavy

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \ell^2, \\ xy &= x + y \end{aligned}$$

jsme tedy získali soustavu

$$\begin{aligned} x + y &= \tfrac{16}{3}, \\ xy &= \tfrac{16}{3}. \end{aligned}$$

Dosadíme $y = \frac{16}{3} - x$ do druhé rovnice a dostaneme kvadratickou rovnici

$$x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 0.$$

Řešení jsou $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{4}{3}$, tedy původní soustava má řešení $(4, \frac{4}{3})$ a $(\frac{4}{3}, 4)$. Žebříkem můžeme tedy dosáhnou až do výšky 4.

Postřeh *Úloha řešit soustavu dvou kvadratických rovnic o dvou neznámých je stejně těžká jako úloha řešit rovnici čtvrtého stupně.*

Důvod. Je-li x řešení rovnice

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

pak (x, x^2) řeší soustavu

$$\begin{aligned} ay^2 + bxy + cy + dx + e &= 0, \\ y - x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Naopak, pokud (x, y) je řešení soustavy

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= 0, \\ Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0, \end{aligned}$$

dostaneme x jako řešení rovnice (nejvýše) čtvrtého stupně, po dosazení dopočítáme y z kvadratické rovnice. To nyní probereme podrobněji.

Připomeňme, že počet řešení je buďto nekonečný, nebo omezený počtem 4.

1. Pokud v soustavě

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \tag{4}$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{5}$$

je $C = 0$, druhou rovnici můžeme přepsat jako

$$(Bx + E)y + Ax^2 + Dx + F = 0. \tag{6}$$

Pokud navíc $B = E = 0$, redukuje se (6) na kvadratickou rovnici v proměnné x

$$Ax^2 + Dx + F = 0 \tag{7}$$

a cíle je dosaženo:

Nechť $C = B = E = 0$. Je-li (u, v) řešení soustavy (4),(5), pak $x = u$ řeší (7) a $y = v$ řeší kvadratickou rovnici o neznámé y

$$cy^2 + (bu + e)y + (au^2 + du + f) = 0. \tag{8}$$

Naopak, pokud $x = u$ řeší (7) a $y = v$ řeší (8), pak (u, v) řeší soustavu (4),(5). Jestliže rovnice (8) nemá řešení, $x = u$ nelze doplnit žádným v tak, aby dvojice (u, v) řešila soustavu (4),(5).

2. Nechť nyní $C = B = 0$, ale $E \neq 0$. Z (5) snadno vyjádříme y a dosadíme do (4), kde získáme rovnici čtvrtého stupně v proměnné x:

Nechť $C = B = 0 \neq E$. Je-li (u, v) řešení soustavy (4),(5), pak $x = u$ řeší rovnici čtvrtého stupně o neznámé x

$$ax^2 - bx\,\frac{Ax^2 + Dx + F}{E} + c\,\frac{(Ax^2 + Dx + F)^2}{E^2} + dx - e\,\frac{Ax^2 + Dx + F}{E} + f = 0 \tag{9}$$

a

$$v = -\frac{Au^2 + Du + F}{E}. \tag{10}$$

Naopak, pokud $x = u$ řeší (9) a v splňuje (10), pak (u, v) řeší soustavu (4),(5).

3. Když $C = 0$ a $B \neq 0$, vynásobíme rovnici (4) výrazem $(Bx + E)^2$. Dostaneme

$$\begin{aligned} &ax^2(Bx + E)^2 + bx(Bx + E)[(Bx + E)y] \\ &\quad + c[(Bx + E)y]^2 + dx(Bx + E)^2 \\ &\quad + e(Bx + E)[(Bx + E)y] + f(Bx + E)^2 = 0 \end{aligned}$$

Nahradíme-li všude součin $(Bx + E)y$ trojčlenem $-(Ax^2 + Dx + F)$, dostaneme kýženou rovnici čtvrtého stupně:

$$\begin{aligned} &ax^2(Bx + E)^2 - bx(Bx + E)(Ax^2 + Dx + F) \\ &\quad + c(Ax^2 + Dx + F)^2 + dx(Bx + E)^2 \\ &\quad - e(Bx + E)(Ax^2 + Dx + F) + f(Bx + E)^2 = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Nechť $C = 0 \neq B$. Je-li (u, v) řešení soustavy (4),(5), pak $x = u$ řeší rovnici čtvrtého stupně (11) o neznámé x. Je-li $Bu + E \neq 0$, pak v lze dopočítat jako

$$v = -\frac{Au^2 + Du + F}{Bu + E}. \tag{12}$$

Je-li $Bu + E = 0$, pak v dopočítáme jako řešení kvadratické rovnice v proměnné y, totiž

$$a\,\frac{E^2}{B^2} - b\,\frac{E}{B}y + cy^2 - d\,\frac{E}{B} + ey + f = 0. \tag{13}$$

Naopak, pokud $x = u$ řeší (9), potom nastane jeden z případů: když $Bu + E \neq 0$ a v dopočítáme z (12), pak (u, v) řeší soustavu (4),(5). Když $Bu + E = 0$, v splňuje (13) a ještě je splněno

$$Au^2 + Du + F = 0, \tag{14}$$

pak (u, v) řeší soustavu (4),(5). V ostatních případech nenajdeme v tak, aby (u, v) řešilo soustavu (4),(5).

4. Pokud v soustavě

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

je $C \neq 0$, pak odečteme c násobek druhé rovnice od C násobku prvé rovnice a dostaneme rovnici tvaru

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \varphi = 0,$$

kde $\gamma = 0$. Prvou rovnici původní soustavy nahradíme novou rovnicí a jsme ve stejné situaci jako v některém z předchozích případů (až na pořadí rovnic). Je to ekvivalentní úprava, takže dopočítání a diskusi už můžeme ponechat na čtenáři.

Metodu převedení budeme ilustrovat na několika případech. Soustředíme se na 3. případ "Postřehu", $C = 0 \neq B$, protože ten je nejzajímavější.

Příklad

$$x + y - 2 = 0, \tag{15}$$
$$xy - 1 = 0. \tag{16}$$

Řešení. Soustavu bychom uměli spočítat i rychleji, protože první rovnice je lineární, ale budeme postupovat podle návodu jako kdyby byla kvadratická. První rovnici vynásobíme x^2 (zbytečné, stačilo by x, ale postupujeme podle algoritmu) a dostaneme

$$x^3 + yx^2 - 2x^2 = 0. \tag{17}$$

Namísto yx v rovnici (17) dosadíme 1. Dostaneme (11) ve tvaru

$$x^3 + x - 2x^2 = 0. \tag{18}$$

Tato rovnice má řešení $x = 0$, $x = 1$. Buď $u = 0$, potom $Bu + E = u = 0$ a v dostaneme dosazením do (13), konkrétně (15): $u + v - 2 = 0$, odtud $v = 2$. Řešení $(0, 2)$ je však falešné, protože nesplňuje (14), konkrétně $1 = 0$. Zkouška též ukazuje selhání (16). Nechť nyní $u = 1$, pak $Bu + E = u \neq 0$ a v dopočítáme z (12), konkrétně $v = 1/u = 1$. Dostaneme $u + v = 2$, odtud $v = 1$. Řešení $(1, 1)$ je jediné správné.

Příklad

$$x + y^2 + 1 = 0, \tag{19}$$
$$xy - x = 0. \tag{20}$$

Řešení. První rovnici vynásobíme x^2 a dostaneme

$$x^3 + y^2x^2 + x^2 = 0. \tag{21}$$

Namísto yx v rovnici (21) dosadíme x. Dostaneme (11) ve tvaru

$$x^3 + x^2 + x^2 = 0. \tag{22}$$

Tato rovnice má řešení $x = 0$, $x = -2$. Buď $u = 0$, potom $Bu + E = u = 0$ a v dostaneme dosazením do (13), konkrétně (19): $u + v^2 + 1 = 0$. Tato rovnice však nemá řešení, i když test (14), konkrétně $u = 0$, je splněn. Nechť nyní $u = -2$, pak $Bu + E = u \neq 0$ a v dopočítáme z (12), konkrétně $v = u/u = 1$. Řešení $(1, 1)$ je jediné správné.

Příklad

$$xy - y^2 = 0, \tag{23}$$
$$-x^2 + xy + x - y = 0. \tag{24}$$

Řešení. První rovnici vynásobíme $(x-1)^2$ a dostaneme

$$xy(x-1)^2 - y^2(x-1)^2 = 0. \tag{25}$$

Namísto $(x-1)y$ v rovnici (25) dosadíme $x^2 - x$. Dostaneme (11) ve tvaru

$$x(x-1)x(x-1) - x^2(x-1)^2 = 0, \tag{26}$$

po úpravě

$$0 = 0.$$

Nenecháme se zastrašit. Tuto rovnici řeší každé reálné x. Nechť $u = 1$, pak $Bu + E = u - 1 = 0$ a v dostaneme dosazením do (13), konkrétně (23): $uv - v^2 = 0$, neboli $v - v^2 = 0$, řešení jsou $(1,1)$ a $(1,0)$. Test (14) má tvar $u^2 - u = 0$, to je také splněno, tedy řešení $(1,1)$ a $(1,0)$ jsou platná, můžeme se přesvědčit zkouškou. Nechť u je nyní libovolné číslo různé od 1. Potom $Bu + E = u - 1 \neq 0$ a v dopočítáme z (12), konkrétně

$$v = \frac{u^2 - u}{u - 1} = u.$$

Řešení (u,u) pro $u \neq 1$ jsou také platná, můžeme se přesvědčit zkouškou. Shrneme-li, řešením úlohy jsou všechny dvojice tvaru (u,u), kde u probíhá $\mathbb{R}$, a kromě toho $(1,0)$.

Úloha. *Zjistěte, pro která reálná čísla p mají rovnice*

$$x^3 + x^2 - 36x - p = 0,$$
$$x^3 - 2x^2 - px + 2p = 0$$

společný kořen v oboru reálných čísel.

Řešení. Rovnice si napíšeme ve tvaru

$$x(x^2 - 36) + x^2 - p = 0, \tag{27}$$

$$(x^2 - p)(x - 2) = 0 \tag{28}$$

Z rovnice (28) odvodíme, že $x = 2$ nebo $x^2 = p$.

Jestliže $x = 2$, pak rovnice (28) je splněna a z rovnice (27) dopočítáme $p = -60$, aby byla také splněna.

Jestliže $x^2 = p$, potom rovnice (27) se redukuje na

$$x(x^2 - 36) = 0.$$

Tedy x může nabývat hodnot $0, 6, -6$. Pokud p dopočítáme jako $p = x^2$, obě rovnice jsou zřejmě splněny.

Závěr. Řeší dvojice $(x,p) \in \{(2,-60),\ (0,0),\ (6,36),\ (-6,36)\}$.

Úloha. *Zjistěte, pro která reálná čísla p má soustava*

$$x^2y - 2x = p,$$
$$y^2x - 2y = 2p - p^2$$

právě tři řešení v oboru reálných čísel.

Řešení. Nejprve se zabývejme případem $p = 0$. Pak pro každé reálné $x \neq 0$ je dvojice $(x, 2/x)$ řešením dané soustavy, máme tedy nekonečně mnoho řešení a $p = 0$ nevyhovuje.

Nechť nyní $p \neq 0$. Potom z první rovnice dostaneme, že také $x \neq 0$. Vydělíme-li druhou rovnici první rovnicí, dostaneme

$$\frac{y}{x} = 2 - p.$$

Dosaďme $y = (2-p)x$ do první rovnice, máme

$$\begin{aligned} 0 &= (2-p)x^3 - 2x - p = (2-p)x^3 + 2 - p - 2x - 2 \\ &= (2-p)(x^3 + 1) - 2(x+1) \\ &= (2-p)(x+1)(x^2 - x + 1) - 2(x+1). \end{aligned}$$

Poslední rovnici

$$0 = (2-p)(x+1)(x^2 - x + 1) - 2(x+1).$$

určitě řeší $x = -1$. Další řešení dostaneme po vydělení rovnice dvojčlenem $(x + 1)$. Vznikne kvadratická rovnice

$$(2 - p)(x^2 - x + 1) - 2 = 0$$

Tato rovnice je vlastně kvadratická jen pro $p \neq 2$. Pro $p \geq 2$ nová rovnice nemá řešení a původní soustava má jen jedno řešení $(x, y) = (-1, p - 2)$.

Nechť tedy dál $p < 2$. Poslední rovnice

$$(2 - p)(x^2 - x + 1) = 2 \tag{29}$$

se upraví na

$$x^2 - x + a = 0, \quad \text{kde } a = 1 - \frac{2}{2 - p} < 1. \tag{30}$$

Aby původní rovnice (soustava) měla tři řešení, musí mít (30) dvě řešení různá od -1. Odtud dostáváme $a \neq -2$ a $1 - 4a > 0$. V proměnné p to znamená $p \neq 4/3$ a $p > -2/3$. Pro tyto hodnoty dopočítáme x ze vzorce pro řešení kvadratické rovnice a y jako $y = (2 - p)x$.

Závěr. Úloha má právě tři řešení pro $p \in (-2/3, 0) \cup (0, 4/3) \cup (4/3, 2)$.

Připomeňme: pro $p < -2/3$ je výraz na levé straně

$$(2 - p)(x^2 - x + 1) = 2 \tag{31}$$

všude větší než 2. Pro $p = -2/3$ je roven dvěma jen v jednom bodě. Pro $p = 0$ není

$$(2 - p)(x + 1)(x^2 - x + 1) - 2(x + 1) = 0 \tag{32}$$

ekvivalentní původnímu zadání. Pro $p = 4/3$ má (31) řešení -1 a tudíž (32) má opět jen dvě řešení. Pro $p \geq 2$ není výraz na levé straně (31) nikde kladný a (32) má tedy jen jedno řešení.

Úloha. *Zjistěte, pro která reálná čísla p, q mají rovnice*

$$\begin{aligned} x^3 + (p + 1)x^2 + (p - q)x + 3q &= 0, \\ x^3 + px^2 + (2p - q)x - 2q &= 0 \end{aligned}$$

dvě společná řešení v oboru reálných čísel.

Řešení. Pokud x je společné řešení daných rovnic, musí řešit i rovnic vzniklou jejich odečtením, totiž

$$x^2 - px + q = 0. \tag{33}$$

Uvědomme si, že rovnice (33) má maximálně dvě řešení, takže i dané rovnice mají maximálně dvě společná řešení. Diskusi, kdy rovnice (33) má dvě řešení, se zatím vyhneme. Uvažme, že mají-li dané rovnice dvě řešení z_1 a z_2, musí být $x^2-px+q = (x-z_1)(x-z_2)$, a tudíž musí být polynom $x^3+(p+1)x^2+(p-q)x+3q$ dělitelný činiteli $(x - z_1)$, $(x - z_2)$ a celým polynomem $x^2 - px + q$ (beze zbytku). Máme

$$\begin{aligned} x^3 + (p + 1)x^2 + (p - q)x + 3q = {} & (x^2 - px + q)(x + 2p + 1) \\ & + (2p^2 + 2p - 2q)x - 2pq + 2q. \end{aligned}$$

Výraz

$$(2p^2 + 2p - 2q)x - 2pq + 2q$$

je onen nechtěný zbytek při dělení, musí být tedy identicky rovný nule. Hledaná dvojice parametrů tedy splňuje soustavu

$$\begin{aligned} 2p^2 + 2p - 2q &= 0, \\ -2pq + 2q &= 0, \end{aligned} \quad \text{neboli} \quad \begin{aligned} p^2 + p - q &= 0, \\ q(p - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Nechť nejprve $q = 0$, potom z první rovnice dostáváme $p = 0$ nebo $p = -1$. Volba $p = 0$, $q = 0$ redukuje původní rovnice na

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 &= 0, \\ x^3 &= 0. \end{aligned}$$

Tyto rovnice mají jen jedno společné řešení $x = 0$ a tudíž $p = q = 0$ nevyhovují zadání úlohy. Další řešení soustavy

$$\begin{aligned} p^2 + p - q &= 0, \\ q(p - 1) &= 0 \end{aligned}$$

je $p = -1$, $q = 0$, dosadíme do původních rovnic

$$x^3 + (p+1)x^2 + (p-q)x + 3q = 0,$$
$$x^3 + px^2 + (2p-q)x - 2q = 0$$

a máme

$$\begin{aligned} x^3 - x &= 0, \\ x^3 - x^2 - 2x &= 0, \end{aligned} \qquad \text{neboli} \qquad \begin{aligned} x(x+1)(x-1) &= 0, \\ x(x+1)(x-2) &= 0. \end{aligned}$$

Tato volba byla úspěšná, dostáváme společná řešení $x = 0, -1$.

Zbývá případ $q \neq 0$. Z druhé rovnice soustavy

$$p^2 + p - q = 0,$$
$$q(p-1) = 0$$

máme $p = 1$ a dosazením do prvé rovnice $q = 2$. Volbu $p = 1$, $q = 2$ dosadíme do původních rovnic

$$x^3 + (p+1)x^2 + (p-q)x + 3q = 0,$$
$$x^3 + px^2 + (2p-q)x - 2q = 0$$

a máme

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - x + 6 &= 0, \\ x^3 + x^2 + 4 &= 0, \end{aligned} \qquad \text{neboli} \qquad \begin{aligned} (x^2 - x + 2)(x+3) &= 0, \\ (x^2 - x + 2)(x+2) &= 0 \end{aligned}$$

(jak jsme na to přišli?) Tato volba by byla úspěšná, kdyby rovnice $x^2 - x + 2$ měla dvě reálná řešení. Protože však tato kvadratická rovnice nemá reálné řešení, dvojice $p = 1$, $q = 2$ neřeší úlohu.

Závěr. Dané rovnice mají dvě společná řešení jen pro $p = -1$, $q = 0$.