TROJÚHELNÍK

JAN MALÝ
UK v Praze a UJEP v Ústí n. L.

1. **Značení.** Uvažujme trojúhelník $\triangle ABC$, jeho strany (či jejich délky) jsou a, b, c, úhly α, β, γ. Obsah trojúhelníka značíme P. Výška spuštěná z bodu C na stranu c se značí v_c a její pata je C_0. Bod, který půlí stranu c, se značí C_1. Úsečka AC_0 se značí c_A a úsečka BC_0 je c_B. Podobně se zavádí značení v_a, A_0, atd. Uvědomte si, že každý vzorec má tři formy, kromě uvedené formy další dvě vzniknou cyklickou záměnou. Například z identity $2P = ab\sin\gamma$ dostáváme cyklickou záměnou postupně $2P = bc\sin\alpha$, $2P = ca\sin\beta$.

2. **Sinová věta.** Snadno nahlédneme

$$a\sin\beta = v_c = b\sin\alpha. \tag{1}$$

To je tzv. sinová věta, kterou můžeme též přepsat ve tvarech

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

nebo

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}.$$

3. **Cosinová věta.**

$$2a\,b\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
2a\,b\cos\gamma &= -2a\,b\cos(\pi-\gamma) = -2a\,b\cos(\alpha+\beta)\\
&= 2a\,b(\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta)\\
&= 2(a\sin\beta)(b\sin\alpha) - 2(a\cos\beta)(b\cos\alpha)\\
&= v_c^2 + v_c^2 - 2c_Ac_B\\
&= a^2 - c_B^2 + b^2 - c_A^2 - 2c_Ac_B\\
&= a^2 + b^2 - (c_A + c_B)^2.
\end{aligned}$$

□

4. **Obsah trojúhelníka.** Z (1) dostáváme

$$2P = c\,v_c = c\,a\sin\beta.$$

Tedy (po cyklické záměně)

$$4P^2 = a^2b^2\sin^2\gamma = a^2b^2(1-\cos^2\gamma).$$

Použijeme cosinovou větu a máme

$$4P^2 = a^2b^2\Big(1 - \Big(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\Big)^2\Big).$$

Po úpravě

$$
\begin{aligned}
16P^2 &= 4a^2b^2 - \big(a^2+b^2-c^2\big)^2 = \big(2ab + (a^2+b^2-c^2)\big)\,\big(2ab - (a^2+b^2-c^2)\big)\\
&= \big((a+b)^2 - c^2\big)\,\big(c^2 - (a-b)^2\big)\\
&= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)
\end{aligned}
$$

Odtud dostáváme *Heronův vzorec*

$$4P = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}.$$

5. **Úloha.** Dokažte: $\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\beta\operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\gamma\operatorname{cotg}\alpha = 1$

Řešení. Použijeme sinovou větu k úpravě na stejné jmenovatele. Máme

$$
\begin{aligned}
&c\Big(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\,\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} + \frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - 1\Big)\\
&\quad= \frac{c\ \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{c\ \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} + \frac{c\ \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha} - \frac{c\ \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\\
&\quad= \frac{c\ \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + \frac{a\ \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\alpha} + \frac{b\ \cos\gamma\cos\alpha}{\sin\beta\sin\alpha} - \frac{c\ \sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\\
&\quad= \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}\big(a\cos\gamma\cos\beta + b\cos\gamma\cos\alpha + c\ \cos(\alpha+\beta)\big)\\
&\quad= \frac{1}{\sin\alpha\sin\beta}\big(c_B\cos\gamma + c_A\cos\gamma - c\cos\gamma\big) = 0.
\end{aligned}
$$

□

6. **Kalkulus planimetrie.** Intuitivně, rozdíl mezi vektorem a bodem je v tom, že vektory se dají sčítat, měřit atd., kdežto body mají jen polohu a vzpírají se kalkulu. Přesto některé aritmetické operace s body dávají smysl, třeba se můžeme smířit s tím, že $\frac{1}{2}(A+B)$ je střed úsečky AB. Každému bodu X ležící na přímce AB jednoznačně odpovídá reálné číslo t tak, že

$$X = A + t(B-A) = (1-t)A + tB,$$

např. $A \mapsto 0$, $B \mapsto 1$. Uvažujme nyní $\triangle ABC$ a obecný bod M. Přímka MC protíná přímku AB v bodě Y. Najdeme reálná čísla s, t tak, že

$$Y = (1-s)A + sB, \qquad M = (1-t)Y + tC.$$

Potom

$$M = (1-t)\Big((1-s)A + sB\Big) + tC = (1-s)(1-t)A + s(1-t)B + tC. \tag{2}$$

Trojice koeficientů $(1-s)(1-t)$, $s(1-t)$, t má tu vlastnost, že

$$(1-s)(1-t)\ +\ s(1-t)\ +\ t = (1-t) + t = 1.$$

Obecně, výraz $\sum_j t_jA_j$, kde t_j jsou reálná čísla a A_j jsou body má smysl

- jako vektor, když $\sum_j t_j = 0$,
- jako bod, když $\sum_j t_j = 1$.

Speciálně bod−bod je vektor, bod+vektor je bod.

Tento kalkulus nám umožňuje snadno zařadit planimetrii do obecného rámce, v němž matematika se zabývá množinami, na nichž je zadána struktura, např. algebraické operace. Cesta přes Eukleidovy axiomy je trnitá a hodně odlišná od algebraické struktury. Oproti tomu ztotožnění roviny s prostorem $\mathbb{R}^2$ zavedením kartézských souřadnic vnáší do planimetrie cizí prvky.

Abychom nebyli omezováni podmínkami na součet koeficientů při algebraickém kombinování bodů, můžeme zavést "hyperprostor". To je trojrozměrný vektorový prostor, v němž uvažujeme dvourozměrný lineární podprostor $\mathbb{V}$ – to budou naše vektory – a s ním rovnoběžný dvourozměrný afinní podprostor $\mathbb{P}$ – to budou naše body. Na prostoru $\mathbb{V}$ máme navíc daný skalární součin, který nám umožňuje definovat *normu* (=délku, velikost) vektoru $\vec{u}$ jako

$$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \tag{3}$$

a úhel ξ mezi vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ pomocí vzorce

$$\cos\xi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|\ |\vec{v}|}. \tag{4}$$

Výhoda hyperprostoru spočívá v tom, že sčítání bodů můžeme zavést jako binární operaci, podobně násobení skalárem, a při výpočtu např.

$$T = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

se nemusíme děsit toho, že výrazy $\frac{1}{3}A$, $\frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B$, které vznikají po cestě, nemají smysl.

Na bázi kalkulu v hyperprostoru můžeme korektně od začátku vybudovat celou planimetrii, tento postup však přeskočíme a v dalším budeme vycházet z běžných středoškolských znalostí bez ohledu na to, jakým způsobem byly získány.

7. **Barycentrické souřadnice.** Vzhledem k danému trojúhelníku $\triangle ABC$, každý bod M roviny se dá jednoznačně vyjádřit v tzv. barycentrických souřadnicích jako

$$M = xA + yB + zC,$$

kde x, y, z jsou reálná čísla. Cesta k důkazu vede přes formuli (2).

Bod M leží v $\triangle ABC$ právě když všechny jeho barycentrické souřadnice jsou ≥ 0.

8. **Příklad (těžiště).** Ukažte, že $T = \tilde{T} := \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$.

Řešení. Musíme ukázat, že podezřelý bod $\tilde{T}$ leží na spojnici CC_1, tj. najít t tak, že

$$\tilde{T} = C + t(C_1 - C) = C + t(\tfrac{1}{2}(A + B) - C).$$

Vyhovuje $t = \frac{2}{3}$. Cyklickou záměnou dostaneme, že $\tilde{T}$ leží i na spojnicích AA_1 a BB_1. Uvědomme si, že jsme vlastně též dokázali, že těžnice se protínají v jednom bodě! □

9. **Příklad (střed kružnice vepsané).** Dokažte, že

$$S = \tilde{S} := \frac{a}{a+b+c}\,A + \frac{b}{a+b+c}\,B + \frac{c}{a+b+c}\,C$$

Řešení. Musíme ukázat, že podezřelý bod $\tilde{S}$ leží na ose úhlu $\angle ACB$. Podívejme se na její geometrickou konstrukci. Uvažujme kružnici k o středu C a poloměru 1. Buď A' průsečík k s polopřímkou CA a B' průsečík k s polopřímkou CB. Potom poměr délky CA ku CA' je $b : 1$, poměr délky CB ku CB' je $a : 1$, tedy

$$A' - C = \frac{A - C}{b}, \qquad B' - C = \frac{B - C}{a}.$$

Sečteme-li vektory $A' - C$ a $B' - C$, dostaneme vrchol D rovnoběžníka, který leží na hledané ose úhlu,

$$D = C + (A' - C) + (B' - C) = C + \frac{A - C}{b} + \frac{B - C}{a}.$$

Tedy osa úhlu má rovnici

$$C + t(D - C), \qquad t \in \mathbb{R},$$

a hledáme, zda existuje $t \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo

$$\tilde{S} = C + t(D - C) = C + t\frac{A - C}{b} + t\frac{B - C}{a}.$$

Vyhovuje $t = \frac{ab}{a+b+c}$.

□

10. **Příklad.** Spočtěte délku úsečky SC, kde S je střed kružnice vepsané.

Řešení. Nejprve vypočteme vektor $S - C$:

$$\begin{aligned} S - C &= \frac{a}{a+b+c}\,A + \frac{b}{a+b+c}\,B + \frac{c}{a+b+c}\,C - C \\ &= \frac{a}{a+b+c}\,(A - C) + \frac{b}{a+b+c}\,(B - C). \end{aligned}$$

Nyní použijeme kalkulus skalárního součinu. Uvědomme si, že podle vzorců (3) a (4) je

$$\begin{aligned} (A - C) \cdot (A - C) &= |A - C|^2 = b^2, \\ (B - C) \cdot (B - C) &= |B - C|^2 = a^2, \\ (A - C) \cdot (B - C) &= ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

Tedy

$$\begin{aligned} |S{-}C|^2 &= (S{-}C) \cdot (S{-}C) \\ &= \Big(\tfrac{a}{a+b+c}\,(A{-}C) + \tfrac{b}{a+b+c}\,(B{-}C)\Big) \cdot \Big(\tfrac{a}{a+b+c}\,(A{-}C) + \tfrac{b}{a+b+c}\,(B{-}C)\Big) \\ &= \Big(\frac{a}{a+b+c}\Big)^2 (A{-}C) \cdot (A{-}C) \\ &\quad + 2\,\frac{a}{a+b+c}\,\frac{b}{a+b+c}(A{-}C) \cdot (B{-}C) \\ &\quad + \Big(\frac{b}{a+b+c}\Big)^2 (B{-}C) \cdot (B{-}C) \\ &= \Big(\frac{a}{a+b+c}\Big)^2 b^2 + 2\,\frac{a}{a+b+c}\,\frac{b}{a+b+c} a\,b \cos \gamma + \Big(\frac{b}{a+b+c}\Big)^2 a^2 \\ &= \frac{2a^2b^2}{(a+b+c)^2}(1 + \cos \gamma). \end{aligned}$$

Nyní můžeme vyjádřit γ podle cosinové věty a dostaneme

$$\begin{aligned} |S{-}C|^2 &= \frac{2a^2b^2}{(a+b+c)^2}\Big(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\Big) = \frac{ab\,(2ab + a^2 + b^2 - c^2)}{(a+b+c)^2} \\ &= \frac{ab\,((a+b)^2 - c^2)}{(a+b+c)^2} = \frac{ab\,(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)^2} = \frac{ab\,(a+b-c)}{(a+b+c)}. \end{aligned}$$

□

11. **Příklad (průsečík výšek).** Dokažte, že

$$V = \tilde{V} := \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\gamma\ A + \operatorname{cotg}\gamma \operatorname{cotg}\alpha\ B + \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta\ C.$$

Řešení. Uvědomme si, že součet koeficientů je skutečně 1 podle úlohy 5. Musíme ukázat, že podezřelý bod $\tilde{V}$ leží na výšce $v_c = CC_0$. Víme, že $C_0 = \frac{a\cos\beta}{c}\ A + \frac{b\cos\alpha}{c}\ B$. Hledáme t tak, že

$$\tilde{V} = C + t(C_0 - C) = (1-t)C + t\frac{a\cos\beta}{c}\ A + t\frac{b\cos\alpha}{c}\ B.$$

Vyhovuje

$$t = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

□

12. **Cvičení (střed kružnice opsané).** Dokažte, že

$$O = \tilde{O} := \frac{\cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\ A + \frac{\cos\beta}{\sin\gamma\sin\alpha}\ B + \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\beta}\ C.$$

Návod. Střed kružnice opsané je průsečík výšek trojúhelníka $\triangle A_1B_1C_1$, který je podobný $\triangle ABC$. Tedy podle předchozího příkladu

$$O = \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\gamma\ A_1 + \operatorname{cotg}\gamma \operatorname{cotg}\alpha\ B_1 + \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta\ C_1.$$

Nyní dosadíme $A_1 = \frac{1}{2}(B+C)$, $B_1 = \frac{1}{2}(C+A)$, $C_1 = \frac{1}{2}(A+B)$. □